

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID



ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERIA TÉCNICA INDUSTRIAL:
ESPECIALIDAD MECÁNICA

PROYECTO FIN DE CARRERA

**Estudio cinemático y dinámico de la
condición de doble apoyo del bípedo
“PASIBOT”**

Autor: Juan Carlos Fermosell Rubio

Tutor: Jesús Meneses Alonso

Abril de 2010

INDICE

1. OBJETIVOS DEL PROYECTO	11
2. INTRODUCCIÓN.....	13
2.1. <i>Antecedentes históricos.....</i>	<i>14</i>
2.2. <i>La robótica.....</i>	<i>17</i>
2.2.1. <i>Origen y desarrollo de la robótica.....</i>	<i>18</i>
3. CARACTERÍSTICAS DEL PASIBOT	23
3.1. <i>Descripción de los mecanismos.....</i>	<i>23</i>
3.1.1. <i>Chebyshev.....</i>	<i>23</i>
3.1.2. <i>Pantógrafo.....</i>	<i>26</i>
3.1.3. <i>Estabilizador</i>	<i>29</i>
3.2. <i>Nomenclatura de los eslabones</i>	<i>31</i>
3.3. <i>Longitudes de los eslabones</i>	<i>36</i>
3.4. <i>Masas de los eslabones.....</i>	<i>37</i>
3.5. <i>Simplificaciones realizadas</i>	<i>38</i>
4. CINEMÁTICA DEL PASIBOT	39
4.1. <i>Ángulos del PASIBOT.....</i>	<i>39</i>
4.1.1. <i>Relación de cierre 1: Chebyshev.....</i>	<i>40</i>
4.1.2. <i>Relación de cierre 2: Semipantógrafo.....</i>	<i>42</i>
4.1.3. <i>Relación de cierre 3: Estabilizador</i>	<i>44</i>
4.1.4. <i>Representación de los ángulos</i>	<i>46</i>
4.2. <i>Centro de masas del PASIBOT.....</i>	<i>47</i>
5. ESTABILIDAD DEL PASIBOT	53
5.1. <i>Estudio de la estabilidad de la primera etapa del paso</i>	<i>58</i>
5.2. <i>Estudio de la estabilidad de la segunda etapa del paso.....</i>	<i>61</i>
5.3. <i>Estudio de la estabilidad de la tercera etapa del paso.....</i>	<i>63</i>

5.4. Paso completo.....	66
6. FUERZAS	67
6.1. Fuerzas normales.....	67
6.1.1. Fuerza normal en la primera etapa del paso.....	68
6.1.2. Fuerza normal en la segunda etapa del paso	69
6.1.3. Fuerza normal en la tercera etapa del paso	72
6.1.4. Paso completo	73
6.2. Fuerza de rozamiento	74
6.2.1. Resultados obtenidos	77
6.3. Fuerza tangencial	83
7. DESLIZAMIENTO DEL BÍPEDO	85
7.1. Método de resolución.....	87
7.1.1. Primera hipótesis de deslizamiento.....	88
7.1.2. Segunda hipótesis de deslizamiento.....	89
7.1.3. Tercera hipótesis de deslizamiento	90
7.1.4. Diagrama de Flujo.....	91
8. CONCLUSIONES.....	93
9. TRABAJOS FUTUROS	95

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. FOTOGRAFÍA DE KAREL CAPEK.....	13
FIGURA 2. ASIMO, ROBOT HUMANOIDE CREADO POR HONDA.....	13
FIGURA 3. EL GALLO DE ESTRASBURGO.....	14
FIGURA 4. REPRODUCCIÓN DEL LEÓN MECÁNICO DE DA VINCI.....	15
FIGURA 5. LAS MUÑECAS DE JAQUET DROZ, LA PIANISTA, EL DIBUJANTE Y EL ESCRITOR.	15
FIGURA 6. EL TELAR DE JACQUARD.	16
FIGURA 7. PRIME TELEMANIPULADOR MAESTRO-ESCLAVO.....	18
FIGURA 8. TELEOPERADOR PARA LA EXPLORACIÓN SUBMARINA VICTOR.	19
FIGURA 9. ROBOT IRB6 DE LA FIRMA SUECA ASEA.....	19
FIGURA 10. ROBOTS UTILIZADOS EN LA INDUSTRIA EN UNA CADENA DE MONTAJE DE VEHÍCULOS.	20
FIGURA 12. ROBOT SUBMARINO SEATOTTER.....	21
FIGURA 13. MQ-1 PREDATOR, VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO (UAV).	21
FIGURA 14. ROBOT PARA EL NIVELADO DE SUELOS DE HORMIGÓN.....	22
FIGURA 15. SISTEMA DA VINCI.....	22
FIGURA 16. MECANISMO DE CHEBYSHEV.....	24
FIGURA 17. MECANISMO DE CHEBYSHEV CON CRUCE DE BARRAS.....	25
FIGURA 18. RETRATO DE PAFNUTI CHEBYSHEV.	25
FIGURA 19. MECANISMO DE ROBERTS.....	26
FIGURA 20. ESQUEMA DEL MECANISMO DE PANTÓGRAFO.....	27
FIGURA 21. PANTÓGRAFO USADO PARA EL COPIADO Y LA TALLA EN MINIATURA.	27
FIGURA 22. COMBINACIÓN DEL MECANISMO DE CHEBYSHEV Y DEL PANTÓGRAFO.....	28
FIGURA 23. ESTABILIZADOR. LA CADERA CON LA DIRECCIÓN DE LA CORREDERA Y EL PUNTO DE APOYO DE LA MANIVELA (RECUADRADA EN ROJO).....	29
FIGURA 24. EL PASIBOT CON LAS TRES PARTES DIFERENCIADAS.....	30
FIGURA 25. ESQUEMA DEL PASIBOT CON LA NOMENCLATURA USADA.....	31
FIGURA 26. POSICIÓN DEL PASIBOT EN EL MOMENTO DE DOBLE APOYO.	32
FIGURA 27. MOVIMIENTO DEL PASIBOT DISEÑADO CON EL WORKING MODEL 2D.....	34
FIGURA 28. RELACIÓN DE PROPORCIONES DEL MECANISMO CHEBYSHEV.	40
FIGURA 29. RELACIÓN DE PROPORCIONES DEL SEMIPANTÓGRAFO.	42
FIGURA 30. RELACIÓN DE PROPORCIONES DEL ESTABILIZADOR.	44
FIGURA 32. EQUILIBRIO DE LA CADERA EN LA POSICIÓN 1.....	50
FIGURA 33. EQUILIBRIO DE LA CADERA EN LA POSICIÓN 2.	50
FIGURA 34. SITUACIÓN DEL CENTRO DE MASAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA AUXILIAR.....	51
FIGURA 35. PRIMERA ETAPA DEL PASO.	54

FIGURA 36. SEGUNDA ETAPA DEL PASO.	55
FIGURA 37. TERCERA ETAPA DEL PASO.....	55
FIGURA 38. PERFIL DEL PIE.	57
FIGURA 39. CAPTURA DEL WORKINGMODEL DE LA ETAPA 1 DEL PASO.	58
FIGURA 40. CAPTURA DEL WORKINGMODEL DE LA ETAPA 2 DEL PASO.	61
FIGURA 41. CAPTURA DEL WORKINGMODEL DE LA ETAPA 3 DEL PASO.	63
FIGURA 42. CINCO EJEMPLOS DE LA TERCERA LEY DE NEWTON.	67
FIGURA 43. ESQUEMA DE FUERZAS PARA LA PRIMERA ETAPA DEL PASO.	68
FIGURA 44. ESQUEMA DE FUERZAS PARA LA SEGUNDA ETAPA DEL PASO.	69
FIGURA 45. ESQUEMA DE FUERZAS PARA LA TERCERA ETAPA DEL PASO.	72
FIGURA 46. CONO DE DESLIZAMIENTO O ROZAMIENTO.	74
FIGURA 47. ESQUEMA DE FUERZAS PARA LA OBTENCIÓN DE LA FUERZA TANGENCIAL EN CADA PIE.....	83
FIGURA 48. EL PASIBOT EN LA SEGUNDA ETAPA DEL PASO CON AMBOS PIES APOYADOS.	85
FIGURA 49. PRIMERA HIPÓTESIS DE DESLIZAMIENTO. EL PIE SALIENTE SE MANTIENE FIJO Y EL PIE ENTRANTE DESLIZA SOBRE EL SUELO.	88
FIGURA 50. SEGUNDA HIPÓTESIS DE DESLIZAMIENTO. EL PIE SALIENTE DESLIZA Y EL PIE ENTRANTE SE MANTIENE FIJO AL SUELO.	89
FIGURA 51. TERCERA HIPÓTESIS DE DESLIZAMIENTO. AMBOS PIES DESLIZAN SOBRE EL SUELO.	90
FIGURA 52. DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA RESOLUCIÓN DE LA CINEMÁTICA DEL PASIBOT...	91

INDICE DE TABLAS

TABLA 1. RESUMEN DE LOS ESLABONES DE LA PIERNA IZQUIERDA.	33
TABLA 2. RESUMEN DE LOS ESLABONES DE LA PIERNA DERECHA.	33
TABLA 3. LONGITUD DE LOS ESLABONES SALIENTES.	36
TABLA 4. LONGITUD DE LOS ESLABONES ENTRANTES.	36
TABLA 5. MASA DE LOS ESLABONES.	37
TABLA 6. COORDENADAS DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA CADERA.	50
TABLA 7. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE LA PRIMERA ETAPA DEL PASO. EN DIFERENTE COLOR LOS PUNTOS EN DONDE SE PRODUCE LA TRANSFERENCIA ADELANTADA DE MASAS.	60
TABLA 8. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE LA SEGUNDA ETAPA DEL PASO.	62
TABLA 9. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE LA TERCERA ETAPA DEL PASO.	65
TABLA 10. VALORES DEL CÁLCULO DE LAS NORMALES PARA LA SEGUNDA ETAPA DEL PASO. .	70
TABLA 11. COEFICIENTES DE ROZAMIENTO ESTÁTICO PARA DISTINTA COMBINACIÓN DE MATERIALES.	76
TABLA 12. TABLA DE RESULTADOS 1 DE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO PARA AMBOS PIES.	77
TABLA 13. TABLA DE RESULTADOS 2 DE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO PARA AMBOS PIES.	79
TABLA 14. TABLA DE RESULTADOS 3 DE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO PARA AMBOS PIES.	81

ÍNDICE DE GRÁFICAS

GRÁFICA 1. ÁNGULOS DE LOS ESLABONES DEL PIE ENTRANTE.	46
GRÁFICA 2. POSICIÓN DEL CENTRO DE MASAS A LO LARGO DEL PASO.	52
GRÁFICA 3. PROTECCIÓN X DEL CENTRO DE MASAS SEGÚN EL ÁNGULO DE GIRO DE LA MANIVELA MOTOR.	52
GRÁFICA 4. TRAYECTORIA DEL PIE ENTRANTE.	56
GRÁFICA 5. DIFERENCIA DE ALTURAS ENTRE PIES.	57
GRÁFICA 6. PRIMERA ETAPA DEL PASO. EL COLOR ROJO Y NARANJA REPRESENTAN LA PROYECCIÓN DEL PIE SALIENTE. EN AMARILLO LA PROYECCIÓN DEL CENTRO DE MASAS.	59
GRÁFICA 7. SEGUNDA ETAPA DEL PASO. AZUL Y ROSA PIE ENTRANTE, ROJO Y NARANJA SALIENTE.	62
GRÁFICA 8. TERCERA ETAPA DEL PASO. EL AZUL Y ROSA REPRESENTAN LA PROYECCIÓN EN X DEL PIE ENTRANTE. EN AMARILLO LA PROYECCIÓN EN X DEL CENTRO DE MASAS.	64
GRÁFICA 9. REALIZACIÓN DE UN PASO COMPLETO.	66
GRÁFICA 10. NORMALES PARA LA PRIMERA ETAPA DEL PASO.	68
GRÁFICA 11. NORMALES PARA PIES APOYADOS EN EL SUELO.	71
GRÁFICA 12. NORMALES PARA LA TERCERA ETAPA DEL PASO.	72
GRÁFICA 13. FUERZAS NORMALES A LO LARGO DE UN PASO COMPLETO.	73
GRÁFICA 14. RESULTADOS DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO OBTENIDOS DE LA TABLA 12.	78
GRÁFICA 15. RESULTADOS DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO OBTENIDOS DE LA TABLA 13.	80
GRÁFICA 16. RESULTADOS DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO OBTENIDOS DE LA TABLA 14.	82
GRÁFICA 30. DIFERENCIA DE ALTURA ENTRE PIES CON UN VALOR ABSOLUTO MENOR DE 2MM. SOMBREADO EN ROJO EL INTERVALO DEL DOBLE APOYO.	86



1. OBJETIVOS DEL PROYECTO

Este Proyecto Fin de Carrera forma parte de una sucesión de varios proyectos englobados dentro del grupo de Investigación MAQLAB del Departamento de Ingeniería Mecánica y del Departamento de Automática de la Universidad Carlos III de Madrid, para el desarrollo y el diseño de un robot bípedo que ha sido bautizado con el nombre PASIBOT.

Las características que definen al PASIBOT es la de ser un robot bípedo de tamaño natural y ligero, capaz de imitar la cinemática de una pierna humana con tan sólo un actuador y por tanto, disponiendo solamente de un grado de libertad. A diferencia de la mayoría de los robots humanoides actuales, que poseen un número alto de grados de libertad para imitar a las juntas biológicas de la pierna humana. Esto hace que los diseños actuales de múltiples actuadores en las piernas de los robots, en la mayoría de los casos, el peso aumente debido a los motores, así como su coste directamente.

Por ello, en este proyecto se buscan nuevas soluciones combinando técnicas de control de dinámica pasiva con la utilización de mecanismos clásicos como el pantógrafo, Chebyshev y el estabilizador, para la obtención de un paso humano, con tan solo un grado de libertad y por tanto la utilización de un solo actuador.

El objetivo principal de este Proyecto Fin de Carrera es el estudio cinemático y dinámico en la condición de doble apoyo del PASIBOT, es decir, cuando se encuentra con ambos pies posados en el suelo. La necesidad de realizar este estudio se debe a que es un estado que aún no ha sido estudiado en profundidad y en el que pueden darse una serie de fenómenos que comprometan la estabilidad y el funcionamiento del caminar del robot.



Para lograr el propósito, se deberán desarrollar y completar los siguientes objetivos secundarios, con el fin de dar respuesta a las preguntas sobre la dinámica y la estabilidad en la condición de doble apoyo:

- Plantear las ecuaciones cinemáticas del PASIBOT para ambos pies en movimiento, utilizando un sistema de referencia anclado en la esquina superior izquierda del eslabón cadera.
- Resolver las ecuaciones cinemáticas y obtener el movimiento del centro de masas del PASIBOT a lo largo del paso.
- Comprobación de la estabilidad del PASIBOT mediante la posición del centro de masas. Se dividirá el paso completo del robot en tres etapas, comenzando la primera con un pie apoyado y otro en el aire, la segunda con ambos pies apoyados y la tercera con el pie contrario apoyado y el otro en el aire.
- Delimitación de la fase de doble apoyo del robot bípedo mediante un criterio adecuado.
- Estudio de la cinemática del PASIBOT en la fase de doble apoyo para la comprobación de la existencia de deslizamiento relativo entre pies y suelo.
- Obtener las fuerzas normales a lo largo del paso, desglosadas en las tres etapas mencionadas anteriormente para el análisis del reparto de carga en cada etapa.
- Obtención de los coeficientes de rozamiento estático de diferentes combinaciones de materiales para suelo y pies.
- Planteamiento del método de resolución para determinar los periodos de deslizamiento de cada pie en la fase de doble apoyo.

2. INTRODUCCIÓN

La palabra robot fue usada por primera vez en el año 1921, cuando el escritor checo Karel Capek (1890-1938) estrena en el teatro nacional de Praga su obra *Rossum's Universal Robot (R.U.R.)*. [Capek-35][Capek-66]. Su origen es la palabra eslava *robota*, que se refiere al trabajo realizado de manera forzada. Los robots R.U.R. eran maquinas androides fabricadas a partir de la "formula" obtenida por un brillante científico llamado Rossum. Estos robots servían a sus jefes humanos desarrollando todos los trabajos físicos, hasta que finalmente se rebelan contra sus dueños, destruyendo toda la vida humana, a excepción de unos de sus creadores, con la frustrada esperanza de que les enseñe a reproducirse.



Figura 1. Fotografía de Karel Capek.

En la actualidad, un robot es una entidad virtual o mecánica artificial. En la práctica, esto es por lo general un sistema electro-mecánico que, por su apariencia o sus movimientos, ofrece la sensación de tener un propósito propio. La palabra robot puede referirse tanto a mecanismos físicos como a sistemas virtuales de software, aunque suele aludirse a los segundos con el término de bots, siendo programas informáticos que realizan funciones muy diversas, imitando el comportamiento de un humano.

No hay un consenso sobre qué máquinas pueden ser consideradas robots, pero sí existe un acuerdo general entre los expertos y el público sobre que los robots tienden a hacer parte o todo lo que sigue: moverse, hacer funcionar un brazo mecánico, sentir y manipular su entorno y mostrar un comportamiento inteligente, especialmente si ése comportamiento imita al de los humanos o a otros animales [1].



Figura 2. ASIMO, robot humanoide creado por Honda.

2.1. Antecedentes históricos

A lo largo de toda la historia, el hombre se ha sentido fascinado por máquinas y dispositivos capaces de imitar las funciones y movimientos de los seres vivos. Los griegos tenían una palabra específica para denominar a estas máquinas: *automatos*. De esta palabra deriva la actual autómatas: máquina que imita la figura y movimientos de un ser animado. Los mecanismos animados de Herón de Alejandría (85 d.C) se movían a través de dispositivos hidráulicos, poleas y palancas y tenían fines eminentemente lúdicos.

La cultura árabe (siglo VIII a XV) heredó y difundió los conocimientos griegos, utilizándolos no sólo para realizar mecanismos destinados a la diversión, sino que les dio una aplicación práctica, introduciéndolos en la vida cotidiana de la realeza. Ejemplo de éstos son diversos sistemas dispensadores automáticos de agua para beber o lavarse. También de ese período son otros autómatas, de los que hasta la actualidad no han llegado más que referencias no suficientemente documentadas, como el *Hombre de hierro* de Alberto Magno (1204-1282) o el *Gallo de Estrasburgo* (1352). Éste, que es el autómata más antiguo que se conserva en la actualidad, formaba parte del reloj de la torre de la catedral de Estrasburgo y al dar las horas movía las alas y el pico.

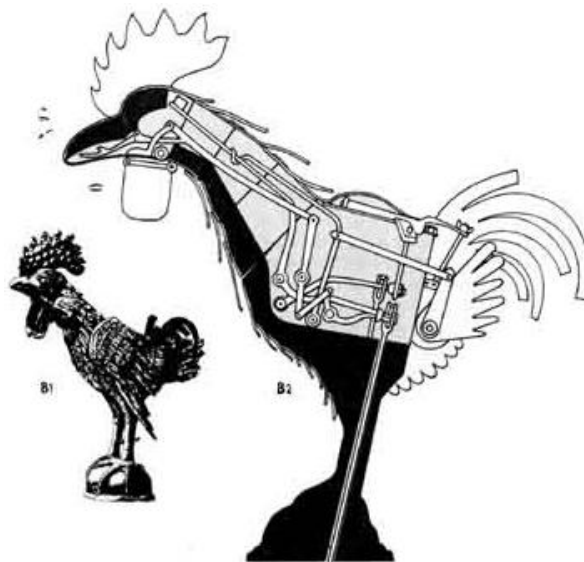


Figura 3. El Gallo de Estrasburgo.

Durante los siglos XV y XVI alguno de los más relevantes representantes del renacimiento se interesan también por los ingenios descritos y desarrollados por los griegos. Es conocido el *León mecánico* construido por Leonardo Da Vinci (1452-1519) para el rey Luis XII de Francia, que se abría el pecho con su garra y mostraba el escudo de armas del rey. En España es conocido el *Hombre de palo*, construido por Juanelo Turriano en el siglo XVI para el emperador Carlos V. Este autómatas con forma de monje, andaba y movía la cabeza, ojos, boca y brazos.



Figura 4. Reproducción del León mecánico de Da Vinci.

Jacques Vaucanson (1709-782), autor del primer telar mecánico, construyó varios muñecos animados, entre los que destaca un flautista capaz de tocar varias melodías y un pato (1738) capaz de graznar, beber, comer, digerir y evacuar la comida. El relojero suizo Pierre Jaquet Droz (1721-1790) y sus hijos Henri-Louis y Jaquet construyeron diversos muñecos capaces de escribir (1770), dibujar (1772) y tocar diversas melodías en un órgano (1773). Estos aún se conservan en el museo de Arte e Historia de Neuchâstel, Suiza. Contemporáneo de los relojeros franceses y suizos fue Henry Maillardet, quien construyó, entre otros, una muñeca capaz de dibujar y que aún se conserva en Filadelfia.



Figura 5. Las muñecas de Jaquet Droz, la pianista, el dibujante y el escritor.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX se desarrollaron algunas ingeniosas invenciones mecánicas, utilizadas fundamentalmente en la industria textil, entre las que destacan la hiladora giratoria de Hargreaves (1770), la hiladora mecánica de Crompton (1779), el telar mecánico de Cartwright (1785) y el telar de Jacquard (1801). Jacquard basándose en los trabajos de Bouchon (1725), Falcon (1728) y del propio Vaucanson (1745), fue el primero en aplicar las tarjetas perforadas como soporte de un programa de trabajo, es decir, eligiendo un conjunto de tarjetas, se definía el tipo de tejido que se desea realizar. Estas máquinas constituyeron los primeros precedentes históricos de las máquinas de control numérico. Es a partir de este momento cuando se empiezan a utilizar dispositivos automáticos en la producción, dando paso a la automatización industrial [1], [2].



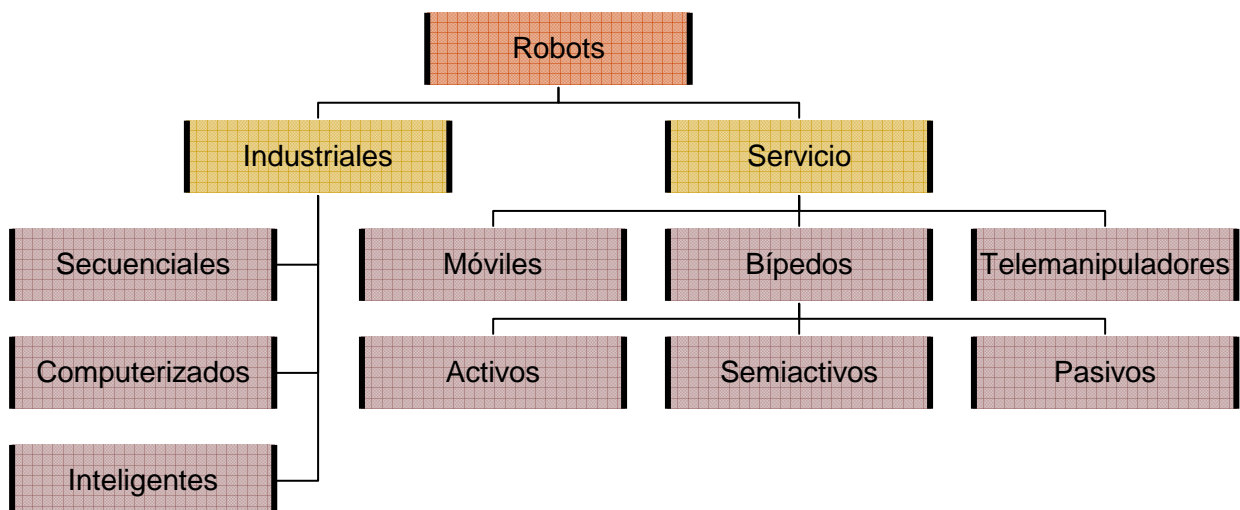
Figura 6. El telar de Jacquard.

2.2. La robótica

La robótica es una ciencia o rama de la tecnología, que estudia el diseño y construcción de máquinas capaces de desempeñar tareas realizadas por el ser humano o que requieren del uso de inteligencia. La robótica combina diversas disciplinas como son: la mecánica, la electrónica, la informática, la inteligencia artificial y la ingeniería de control además de otras áreas de importancia en robótica son el álgebra, los autómatas programables y las máquinas de estados.

Los robots pueden clasificarse de diferentes maneras. Una de las formas más comunes de ser clasificados es la determinada por su arquitectura. Cabe decir que pese a que la clasificación anterior es la más conocida, existe otra no menos importante donde se tiene más en cuenta la potencia del software en el controlador, lo que es determinante de la utilidad y flexibilidad del robot dentro de las limitantes del diseño mecánico y la capacidad de los sensores.

La clasificación según su arquitectura la resumiremos en la siguiente clave de clasificación, estando dividido en dos grandes grupos, los robots industriales y los robots de servicio [3]:



2.2.1. Origen y desarrollo de la robótica

Tras los primeros autómatas descritos en el apartado anterior, los progenitores más directos de los robots fueron los telemanipuladores. En 1984 R.C. Goertz del Argonne National Laboratory desarrolló, con el objetivo de manipular elementos radiactivos sin riesgo para el operador, el primer telemanipulador. Éste consistía en un dispositivo mecánico maestro-esclavo. El manipulador maestro, situado en la zona segura, era movido directamente por el operador, mientras que el esclavo, situado en contacto con los elementos radiactivos y unido mecánicamente al maestro, reproducía fielmente los movimientos de éste. El operador además de poder observar a través de un grueso cristal el resultado de sus acciones, sentía a través del dispositivo maestro, las fuerzas que el esclavo ejercía sobre el entorno.



Figura 7. Prime telemanipulador maestro-esclavo.

La evolución de los telemanipuladores a lo largo de los últimos años no ha sido tan espectacular como la de los robots. Recluidos en un mercado selecto y limitado (industria nuclear, militar, espacial, etc.) son en general desconocidos y comparativamente poco atendidos por los investigadores y usuarios de robots. Por su propia concepción, un telemanipulador precisa del mando continuo de un operador, y salvo por las aportaciones incorporadas con el concepto del control supervisado y la mejora de la telepresencia promovida hoy en día por la realidad virtual, sus capacidades no han variado mucho respecto a la de sus orígenes.



Figura 8. Teleoperador para la exploración submarina VICTOR.

El crecimiento de la robótica en Japón aventajó en breve a los Estados Unidos gracias a Nissan, que formó la primera asociación robótica del mundo, la Asociación de Robótica Industrial de Japón (JIRA) en 1972. Dos años más tarde se formó el Instituto de Robótica de América (RIA), que en 1984 cambió su nombre por el de Asociación de Industrias Robóticas, manteniendo las mismas siglas.

Por su parte Europa tuvo un despertar más tardío. En 1973 la firma sueca ASEA construyó el primer robot con accionamiento totalmente eléctrico, el robot IRb6 (Figura 9), seguido un año más tarde del IRb60. En 1980 se fundó la Federación Internacional de Robótica con sede en Estocolmo, Suecia.



Figura 9. Robot IRb6 de la firma sueca ASEA.

La configuración de los primeros robots respondía a las denominadas configuraciones esféricas y antropomórficas de uso especialmente válido para la manipulación.

La evolución de los robots industriales desde sus primeros balbuceos ha sido vertiginosa. En poco más de 30 años las investigaciones y desarrollos sobre robótica industrial han permitido que los robots tomen posiciones en casi todas las áreas productivas. En pequeñas o grandes fábricas, los robots pueden sustituir al hombre en aquellas tareas repetitivas y hostiles, adaptándose inmediatamente a los cambios de producción solicitados por la demanda variable.



Figura 10. Robots utilizados en la industria en una cadena de montaje de vehículos.

Los futuros desarrollos de la robótica apuntan a aumentar su movilidad, destreza y autonomía de sus acciones. La mayor parte de los robots actuales son con base estática, y se utilizan en aplicaciones industriales tales como ensamblado, soldadura, alimentación de máquinas herramientas, etc. Sin embargo existen otro tipo de aplicaciones que han hecho evolucionar en gran medida tanto la concepción de los robots como su propia morfología.

Entre estos robots dedicados a aplicaciones no industriales destacan los robots espaciales: brazos para lanzamiento y recuperación de satélites, vehículos de exploración, robots para la construcción y mantenimiento de hardware en el espacio.



Figura 11. Vehículo de exploración espacial.

Robots para aplicaciones submarinas y subterráneas: investigación submarina para la inspección de fondos oceánicos hasta una profundidad de 6.000 metros, instalación y mantenimiento de cables telefónicos submarinos, limpieza e inspección de tuberías y drenajes subterráneos, localización y rescate de barcos y aviones hundidos y aplicaciones militares para la recuperación de minas y material bélico hundido.



Figura 12. Robot submarino SEATOTTER.

Robots militares utilizados en tareas de rescate y seguridad ciudadana en la desactivación de explosivos, robots centinelas experimentales dedicados a patrullar áreas críticas, aviones militares no tripulados para misiones de reconocimiento y con capacidad ofensiva como el MQ-1 Predator (Figura 13) [4].

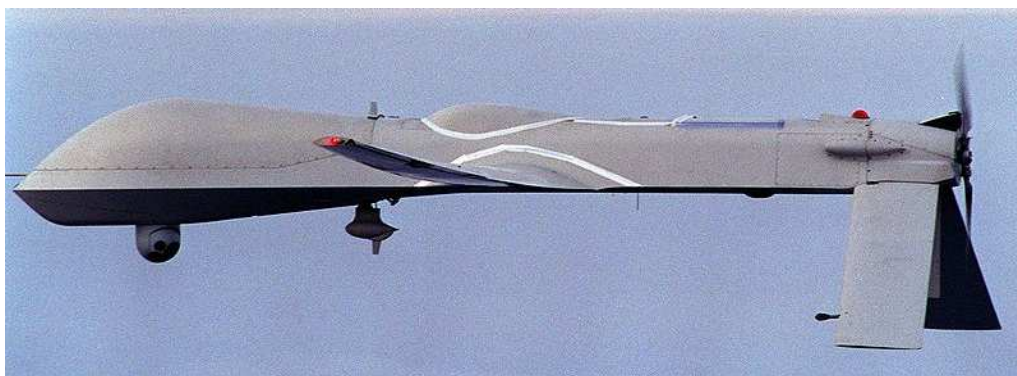


Figura 13. MQ-1 Predator, vehículo aéreo no tripulado (UAV).

Robots aplicados en la construcción para la realización de cerca de 100 funciones diferentes como soldadura de vigas y estructuras de acero, inspección subsónica de la soldadura, proyección de cementos y materiales aislantes en suelo y paredes, manipulación y colocado de paneles de acabado en el exterior y colocación de estructuras exteriores de construcción como paneles y bloques.



Figura 14. Robot para el nivelado de suelos de hormigón.

Las aplicaciones médicas que pueden intervenir un robot en el campo de la cirugía se pueden agrupar en aquellas basadas en la cirugía guiada por imagen y la cirugía mínimamente invasiva. Las principales aportaciones de la robótica en la cirugía son por una parte la gran precisión de movimientos o la eliminación de errores de posicionamiento por falta de visibilidad y por otra parte la posibilidad de separar al cirujano de la sala de operaciones, pudiendo así llegar a pacientes de lugares lejanos [5].



Figura 15. Sistema Da Vinci.



3. CARACTERÍSTICAS DEL PASIBOT

3.1. Descripción de los mecanismos

El mecanismo PASIBOT se puede descomponer en tres partes principales, que llamaremos:

- 1) Chebyshev
- 2) Pantógrafo
- 3) Estabilizador

Con el mecanismo de Chebyshev se convierte el movimiento circular de un motor eléctrico en un movimiento con un tramo aproximadamente recto y otro curvo; el mecanismo del pantógrafo realiza la tarea de aumentar este movimiento e invertirlo; y el estabilizador, mediante el uso de una corredera en la cadera, y una disposición en paralelogramo, asegura que el pie apoyado esté paralelo a la superficie del suelo. A continuación se explica más detalladamente cada parte.

3.1.1. Chebyshev

A lo largo de la historia, la necesidad de realizar un movimiento rectilíneo cíclico mediante el uso de mecanismos ha propiciado el estudio y la invención de diferentes alternativas. Todas estas soluciones pueden clasificarse en dos grandes grupos: los mecanismos de línea recta exacta y los mecanismos de línea recta aproximada. Como su nombre indica, los primeros generan una trayectoria con al menos una porción perfectamente (y matemáticamente demostrable) rectilínea. Los segundos generan una trayectoria tal que una porción de la misma se aproxima a una línea recta.

El mecanismo de línea recta de Chebyshev, es básicamente un mecanismo de cuatro barras, que transfiera el movimiento de rotación pura de la manivela a un movimiento compuesto de la biela (o viceversa) cuyo extremo realiza un movimiento rectilíneo aproximado. También es llamado con el nombre de mecanismo de línea recta de Hoekens [6].

En la Figura 16 se puede ver el mecanismo y las proporciones que debe de guardar partiendo de un valor constante A del eslabón manivela, que esta unido a la biela de longitud $5A$, y esta, unida en su centro a otro eslabón de longitud $2,5A$ a una distancia de $2A$ de la manivela.

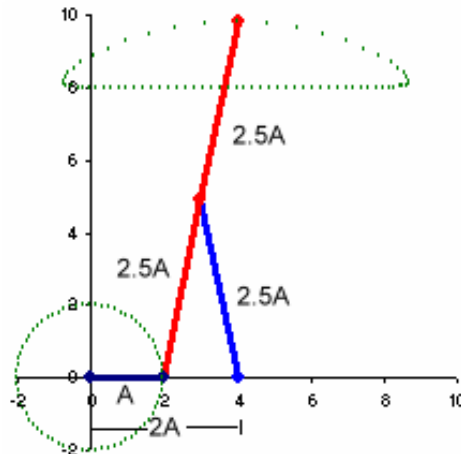


Figura 16. Mecanismo de Chebyshev.

Este es el mecanismo principal del robot; con las dimensiones que se muestran en la Figura 16 se logra convertir el movimiento circular de la manivela 8 (accionada por el motor), en un movimiento en el extremo de la biela que realiza la mitad de su periodo de forma casi recta, mientras que la otra mitad describe un movimiento curvo. La parte del movimiento que es recta será cuando un pie esté apoyado de forma total (toda su superficie en contacto con el suelo) mientras el pie inverso está en el movimiento elíptico el cual lo desplazará hacia delante para terminar con el pie totalmente apoyado y dispuesto a ser ahora el quien soporte el peso en contacto con el suelo, habiendo un instante en que ambos pies se encuentran apoyados simultáneamente.

Existe otro mecanismo al que se le da el nombre de mecanismo de línea recta de Chebyshev y que simula la trayectoria de un paso, con un tramo aproximadamente rectilíneo pero que sin embargo es de más difícil implementación en movimientos rotatorios a tener partes que se cruzan entre sí. Las proporciones utilizadas en los segmentos son: $[O2-O4] = 2 \cdot AB$; $[O2-A] = [O4-B] = 2.5 \cdot AB$ y P es el punto medio del segmento AB que rota sobre si mismo. Siendo por tanto el segmento AB la unidad.

En la siguiente imagen se ve el mecanismo mencionado con la nomenclatura utilizada para determinar las proporciones [7]:

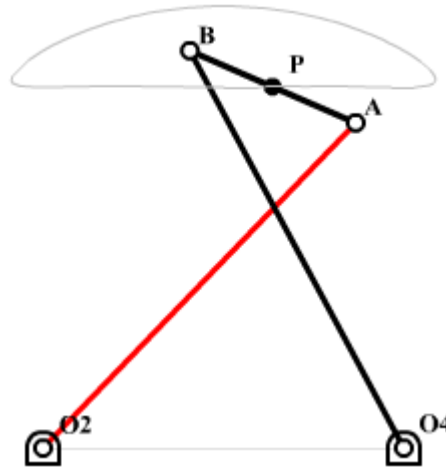


Figura 17. Mecanismo de Chebyshev con cruce de barras.

Estos mecanismos fueron inventados por el matemático Pafnuti Lvóvich Chebyshev nacido en el pueblo ruso de Okatovo el 26 de mayo de 1821 y falleció en San Petesburgo el 26 de noviembre de 1894. Es conocido por su trabajo en el área de la probabilidad y estadística. Creó varias escuelas matemáticas en Rusia: teoría de los números, teoría de probabilidades, teoría de aproximación de funciones, teoría de mecanismos y máquinas y autor de más de 80 publicaciones [8].



Figura 18. Retrato de Pafnuti Chebyshev.

Otro mecanismo de línea recta que posee una trayectoria similar a la del pie es el mecanismo de Roberts (1789-186). Consiste en dos balancines de igual longitud (O_2A es igual a O_4B) articulados a la barra fija y un acoplador con un punto trazador que dista de las articulaciones la misma distancia ($AP = BP = L$) formando el acoplador un triángulo isósceles. Este mecanismo consigue un tramo rectilíneo aproximado entre las articulaciones a la barra fija (es decir, entre O_2 y O_4) como se puede observar en la Figura 19 siguiente.

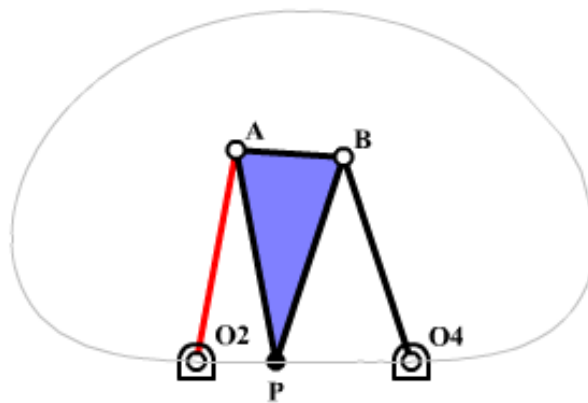


Figura 19. Mecanismo de Roberts.

3.1.2. Pantógrafo

El pantógrafo es la segunda parte principal del mecanismo del PASIBOT y es un mecanismo articulado basado en las propiedades de los paralelogramos; este instrumento dispone de unas varillas conectadas de tal manera que se pueden mover respecto de un punto fijo (pivote).

Las características del pantógrafo son las de tener dos a dos lados iguales paralelos entre si

Tiene aplicaciones en diversos campos de la mecánica, en mecanismos tales como el pantógrafo de ferrocarril, el gato hidráulico, el pantógrafo de oxicorte, o como instrumento de dibujo.

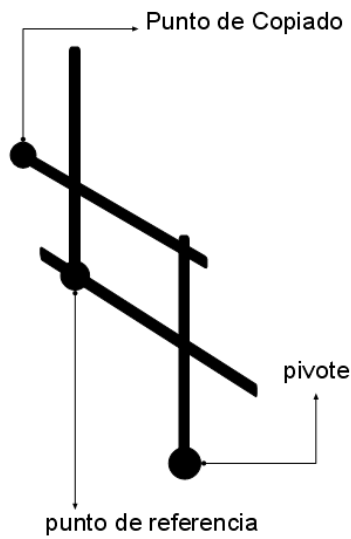


Figura 20. Esquema del mecanismo de pantógrafo.

El pantógrafo de dibujo es el utilizado en el PASIBOT y es un aparato de dibujo cuyo principio es usar una imagen guía con el fin de ampliarla, generalmente usada en arquitectura, consta de un pivote y un cruce de palos de madera o metal [9].

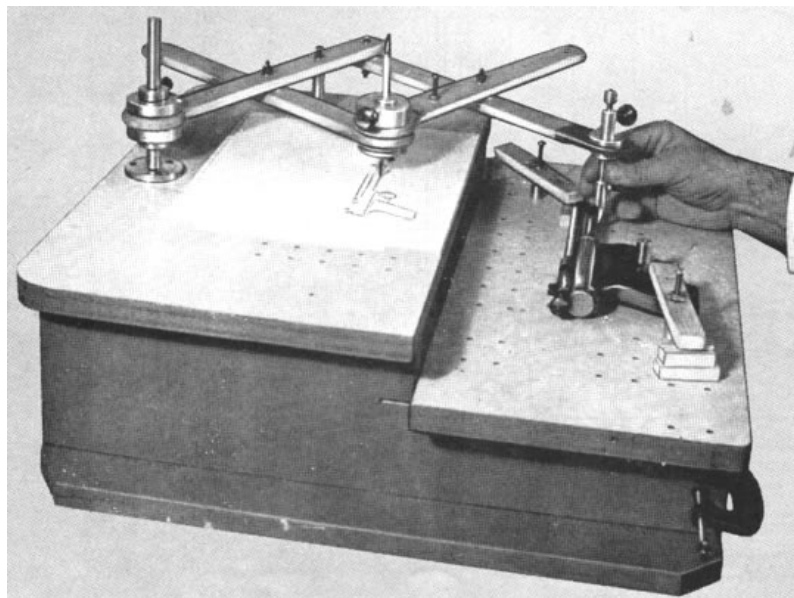


Figura 21. Pantógrafo usado para el copiado y la talla en miniatura.

Con este pantógrafo se logra aumentar e invertir el movimiento que generaba el mecanismo de Chebyshev. En la Figura 22 se aprecia claramente como el movimiento recto-curvo del "punto de referencia" del mecanismo de Chebyshev (en rojo) es invertido y aumentado al "punto de copiado" gracias al pantógrafo (en azul); el "pivote" es el punto fijo del pantógrafo.

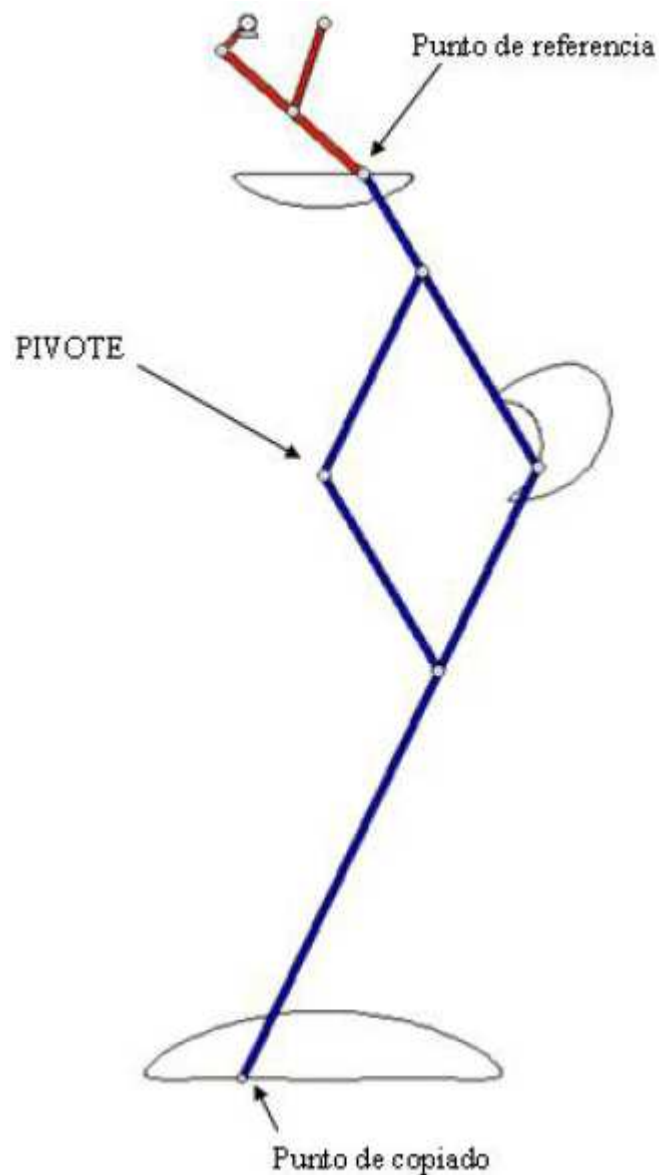


Figura 22. Combinación del mecanismo de Chebyshev y del pantógrafo.

3.1.3. Estabilizador

Una vez que se tiene ya el mecanismo de Chebyshev y el pantógrafo unidos, el mecanismo realiza entre ambos la trayectoria para el avance del pie, pero hay que añadir al final del pantógrafo, en el punto de copiado donde amplifica el movimiento del Chebyshev, un pie para que el robot pueda sostener su propio peso.

Dicho pie deberá configurarse de tal manera que se mantenga paralelo al suelo cuando éste se encuentre con el pie posado y para conseguir este propósito se le añadió una corredera fija a la cadera que es la pieza donde se encuentran fijos los extremos de la manivela y biela del mecanismo de Chebyshev y el punto fijo del pantógrafo, como se puede observar en la siguiente Figura 23.

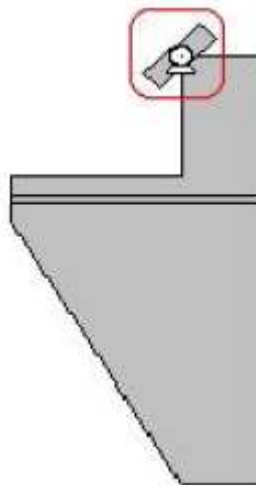


Figura 23. Estabilizador. La cadera con la dirección de la corredera y el punto de apoyo de la manivela (recuadrada en rojo).

Esa corredera está unida a un eslabón estabilizador, el cual está unido al pantógrafo inicial, y a un sistema paralelo al pantógrafo, el cual, obliga a que el ángulo del estabilizador sea igual en los eslabones que comunican el pantógrafo con el sistema paralelo: el propio estabilizador, la rodilla y el pie. Debido a que la corredera solo puede moverse en una dirección, la cual es paralela al suelo, los eslabones citados se ven obligados a moverse solo en esa dirección. Con esto se logra que el pie de apoyo esté paralelo al suelo.

En la Figura 24 se puede observar tanto la pierna derecha como izquierda; la pierna izquierda, en azul esta apoyada en este tramo, su extremo de la manivela realiza la parte del periodo recta, la cual desplaza el PASIBOT hacia delante. En la pierna derecha está representado en rojo el sistema estabilizador, y se observa como el pie estará paralelo a otros dos eslabones gracias a la dirección de la corredera; y en verde el sistema de Chebyshev y pantógrafo juntos. Esta pierna esta en el periodo que describe un movimiento elíptico, que será el correspondiente a levantar el pie y desplazarlo hacia delante para dar el paso.

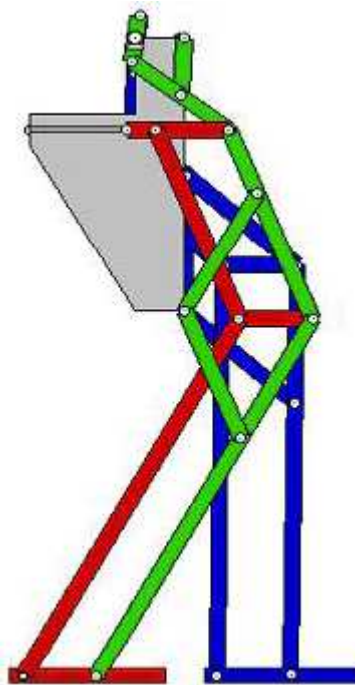


Figura 24. El PASIBOT con las tres partes diferenciadas.

3.2. Nomenclatura de los eslabones

En primera instancia, antes de pasar con la cinemática, se debe definir el nombre con el que se llamará a cada eslabón y un número que le será otorgado para mayor comodidad. De esta manera, también se tendrán que definir los ángulos que forman cada eslabón con la horizontal. En la Figura 25 se puede observar los puntos de unión de los eslabones, siendo 14 eslabones por pierna. Hay que tener en cuenta que tanto el eslabón 14 (cadera) como el eslabón 8 (manivela del motor) son comunes para la pierna izquierda y para la pierna derecha. Por tanto se tiene un total de 26 eslabones, en la Figura 25 se muestran estos elementos junto a los principales ángulos que definen las posiciones del PASIBOT.

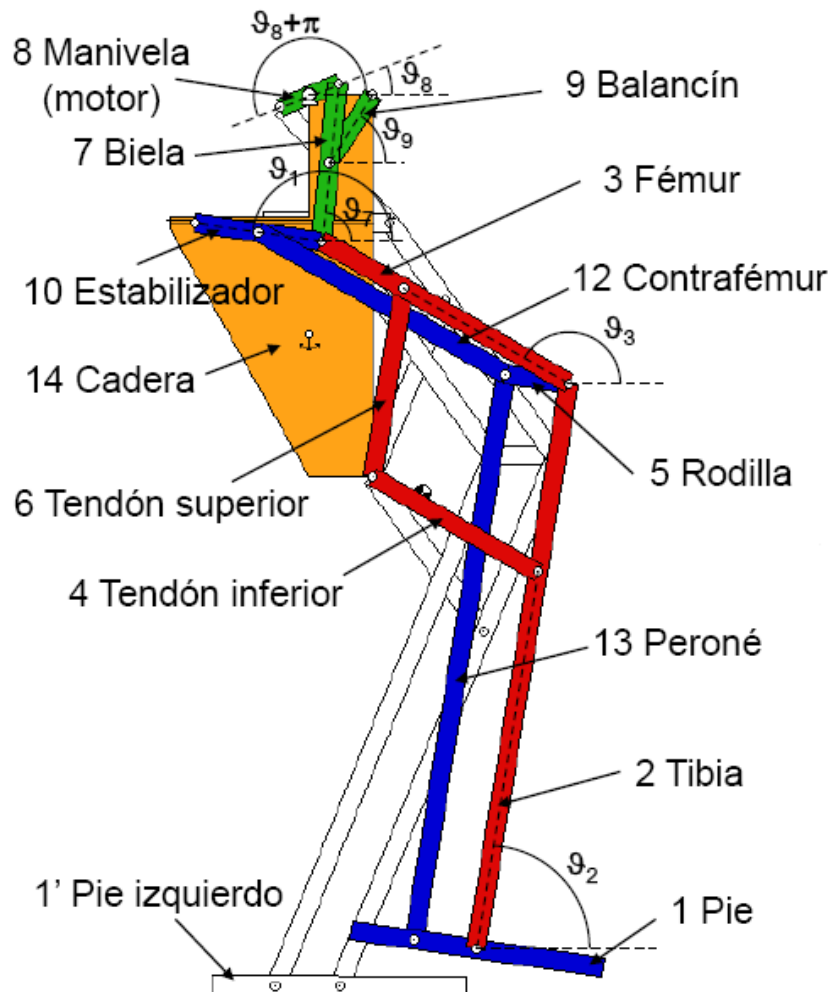


Figura 25. Esquema del PASIBOT con la nomenclatura usada.

A continuación, en la Figura 26 se puede ver al PASIBOT en la condición de doble apoyo que concierne al análisis de este proyecto. El sistema de referencia que se utilizará para el cálculo numérico se encuentra en la esquina superior izquierda del eslabón cadera, y permanecerá anclado en esa posición a lo largo del tiempo en el que se desplace el robot.

Se Puede ver además en la misma figura, como el conjunto de la pierna izquierda se encuentra dibujada en color rojo, así como el conjunto de la pierna derecha es aquella que se encuentra coloreada de azul.

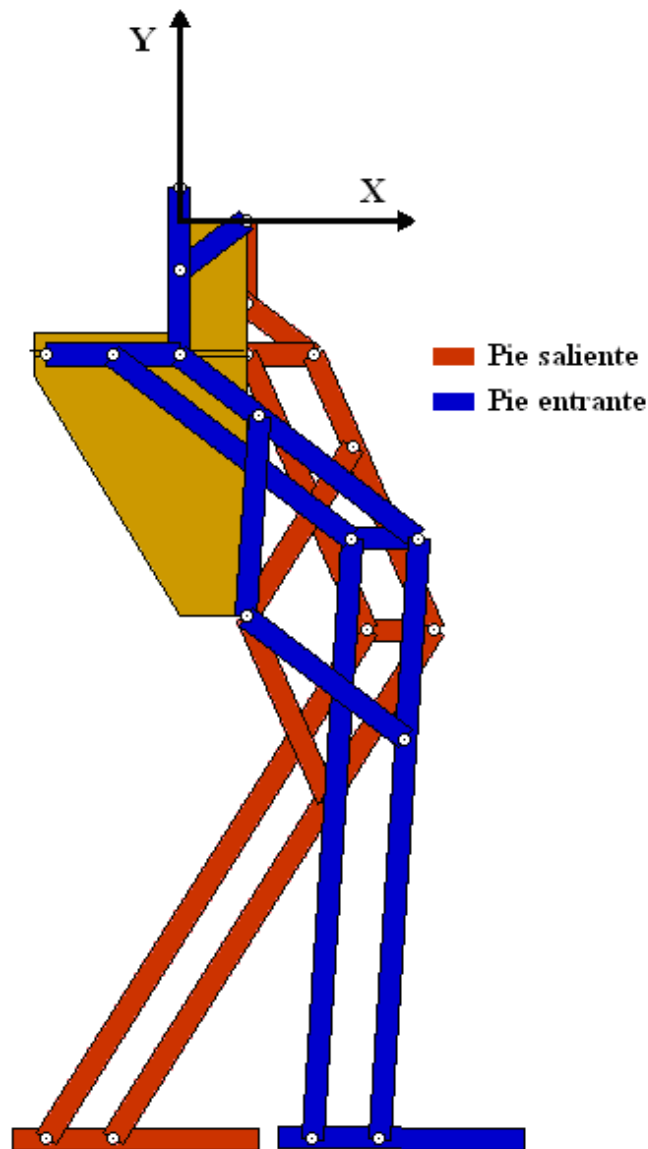


Figura 26. Posición del PASIBOT en el momento de doble apoyo.

La pierna izquierda coloreada de rojo en la imagen anterior, se llamará "saliente" a lo largo del proyecto, debido a que es la última que entró pisando el suelo, y será la que primero salga a la hora de continuar el paso. Esta pierna consta de 14 eslabones que pasamos a enumerar junto a su nombre en la siguiente tabla:

Eslabón saliente	Nombre del eslabón
1 _s	Pie-saliente
2 _s	Tibia-saliente
3 _s	Fémur-saliente
4 _s	Tendón inferior-saliente
5 _s	Rodilla-saliente
6 _s	Tendón Superior-saliente
7 _s	Biela-saliente
8 _s	Manivela motor, misma para ambos pies
9 _s	Balancín-saliente
10 _s	Estabilizador-saliente
11 _s	Cursor-saliente
12 _s	Contrafémur-saliente
13 _s	Peroné-saliente
14 _s	Cadera, misma para ambos pies

Tabla 1. Resumen de los eslabones de la pierna izquierda.

La pierna derecha coloreada de azul en la imagen anterior, se llamará "entrante", debido a que es la que acaba de posarse sobre el suelo, y será la última que salga a la hora de continuar el paso. Esta pierna consta de 14 eslabones como su predecesora como vemos a continuación:

Eslabón entrante	Nombre del eslabón
1 _e	Pie-entrante
2 _e	Tibia-entrante
3 _e	Fémur-entrante
4 _e	Tendón inferior-entrante
5 _e	Rodilla-entrante
6 _e	Tendón Superior-entrante
7 _e	Biela-entrante
8 _e	Manivela, misma para ambos pies
9 _e	Balancín-entrante
10 _e	Estabilizador-entrante
11 _e	Cursor-entrante
12 _e	Contrafémur-entrante
13 _e	Peroné-entrante
14 _e	Cadera, misma para ambos pies

Tabla 2. Resumen de los eslabones de la pierna derecha.

Se puede comprender de una forma más clara el movimiento que realiza el PASIBOT con la siguiente serie de capturas obtenidas de un video del movimiento del paso diseñado con el programa Working Model 2D que permite crear simulaciones de sistemas mecánicos reales. Esta representado de color azul la pierna derecha y de color rojo la pierna izquierda. Los elementos comunes del robot se representan de color gris.

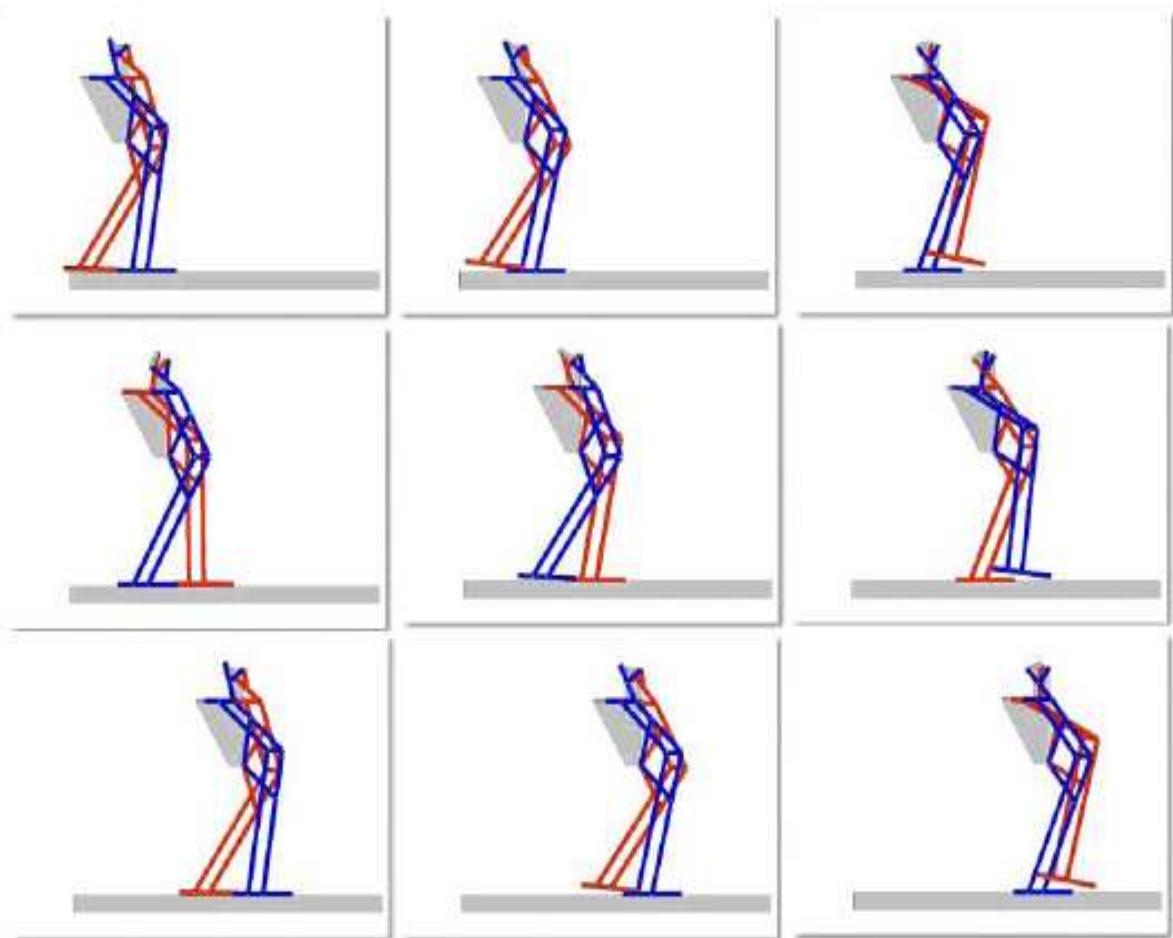


Figura 27. Movimiento del PASIBOT diseñado con el Working Model 2D.



Para acabar de definir la nomenclatura que se utilizará a lo largo del proyecto, tenemos las siguientes variables que utilizaremos, con el respectivo significado de cada una y las unidades en las que vendrán expresadas.

l_i = longitud del eslabón i [mm]

θ_i = Ángulo del eslabón i con el eje x . [rad]

w_i = velocidad angular del eslabón i . [rad/s]

α_i = aceleración angular del eslabón i . [rad/s²]

m_i = masa del eslabón i . [Kg]

I_i = momento de inercia del eslabón i con respecto al eje perpendicular al plano de giro que pasa por el centro de masas. [Kg.mm²]

r_{si} = vector posición del eslabón al centro de masa del pie saliente. [mm]

r_{six} = proyección del vector posición en el eje x del pie saliente. [mm]

r_{siy} = proyección del vector posición en el eje y del pie saliente. [mm]

r_{ei} = vector posición del eslabón al centro de masa del pie entrante. [mm]

r_{eix} = proyección del vector posición en el eje x del pie entrante. [mm]

r_{eiy} = proyección del vector posición en el eje y del pie entrante. [mm]

f_{ij} = fuerza que ejerce el eslabón i sobre el j [N]

f_{ijy} = proyección de f_{ij} sobre el eje y . [N]

f_{ijx} = proyección de f_{ij} sobre el eje x . [N]

3.3. Longitudes de los eslabones

Las medidas del PASIBOT con las que se trabajará son las expuestas a continuación:

Eslabón	Nombre del eslabón	Longitud li [mm]
1 _s	Pie	90
2 _s	Tibia	540
3 _s	Fémur	270
4 _s	Tendón inferior	180
5 _s	Rodilla	90
6 _s	Tendón Superior	180
7 _s	Biela	150
9 _s	Balancín	75
10 _s	Estabilizador	125
11 _s	Cursor	0
12 _s	Contrafémur	270
13 _s	Peroné	540

Tabla 3. Longitud de los eslabones salientes.

Eslabón	Nombre del eslabón	Longitud li [mm]
1 _e	Pie	90
2 _e	Tibia	540
3 _e	Fémur	270
4 _e	Tendón inferior	180
5 _e	Rodilla	90
6 _e	Tendón Superior	180
7 _e	Biela	150
9 _e	Balancín	75
10 _e	Estabilizador	125
11 _e	Cursor	0
12 _e	Contrafémur	270
13 _e	Peroné	540

Tabla 4. Longitud de los eslabones entrantes.

La longitud del eslabón 8, que es común a ambas piernas, es de 60mm.

El ancho de los eslabones es igual para todos, de valor 20mm y el espesor de los eslabones es de 8mm.

3.4. Masas de los eslabones

La densidad de las barras es homogénea y conociendo la longitud de cada una podemos obtener la masa de cada eslabón. La masa de la cadera se ha obtenido mediante la suma de todos los elementos que la componen.

Eslabón	Nombre del eslabón	Masa m_i [kg]
1	Pie	0,2333
2	Tibia	0,4666
3	Fémur	0,2333
4	Tendón inferior	0,1555
5	Rodilla	0,0778
6	Tendón Superior	0,1555
7	Biela	0,1296
8	Manivela Motor	0,0259
9	Balancín	0,0648
10	Estabilizador	0,1080
11	Cursor	0
12	Contrafémur	0,2333
13	Peroné	0,4666
14	Cadera	2,9839
Masa eslabones comunes		3,0098
Masa de una pierna		2,3243
Masa total de los eslabones		7,6584

Tabla 5. Masa de los eslabones.



3.5. Simplificaciones realizadas

A lo largo de este proyecto se trabajará con una serie de simplificaciones para obtener las ecuaciones necesarias para nuestro estudio. Con las simplificaciones realizadas se será capaz de resolver el problema de la cinemática, así como la obtención de las fuerzas de una manera sencilla, sin perjudicar de una manera notable los resultados.

Las simplificaciones realizadas en este proyecto son:

- Estudio en 2D de un problema tridimensional.
- Estudio de masas puntuales. Reduciendo la masa de cada eslabón a su centro de gravedad.
- No existen fuerzas distribuidas, todas ellas son fuerzas puntuales.
- No existe fricción entre eslabones.
- Los cálculos de las ecuaciones se realizarán con el programa de Microsoft Excel 2003 y redondearemos los datos obtenidos a dos cifras decimales.



4. CINEMÁTICA DEL PASIBOT

A lo largo de este capítulo se estudiará la cinemática del PASIBOT, la cual nos permitirá conocer respecto al eslabón de referencia, la manivela motor (eslabón 8), la posición de los demás eslabones, así como el ángulo que forman cada uno con respecto la horizontal. Una vez que se conozcan los ángulos que forman con la horizontal y la posición de cada elemento, obtendremos el centro de masas de cada eslabón y el centro de masas del conjunto entero de todos ellos para poder realizar un estudio sobre la estabilidad del paso.

La elección de la manivela motor como eslabón de referencia se basa en que es donde se conecta directamente el motor eléctrico, y por tanto es una variable conocida y controlado a lo largo del tiempo mediante los encoders electrónicos que se disponen.

Lo anteriormente expuesto, se puede llevar a cabo, debido al que en el momento en que se encuentra apoyado el PASIBOT en el suelo tenemos un mecanismo desmodrómico, lo que quiere decir que a cada posición de cada elemento corresponde una única posición de todos los demás. Además, todos los datos que obtengamos serán en función del ángulo de la manivela motor θ_8 .

4.1. Ángulos del PASIBOT

Al ser el mecanismo de un grado de libertad, la solución cinemática del PASIBOT pasa por expresar la posición de cada eslabón en función de un solo ángulo. Para ello el mecanismo se puede dividir en tres submecanismos cuyas relaciones de cierre nos darán las soluciones para los ángulos que deseamos obtener. Estos submecanismos son: 1-Chebyshev, 2-Semipantógrafo y 3-Estabilizador.

Para el cálculo de los ángulos no se necesita conocer las longitudes de los distintos eslabones, debido a que será suficiente con conocer las proporciones que guardan cada eslabón entre ellos y sus relaciones de cierre que mantienen. La mitad de la manivela motor (eslabón 8) será la utilizada como unidad.

4.1.1. Relación de cierre 1: Chebyshev

La relación de cierre del mecanismo Chebyshev consta de 3 eslabones y esta compuesto por la mitad de la manivela motor que consideramos la unidad; por el balancín (eslabón 9) que es 2,5 veces la mitad de la manivela motor y por la mitad de la biela (eslabón 7) de nuevo 2,5 veces la unidad. Esta primera relación se completa con la distancia existente entre el centro de la manivela motor y el punto de apoyo del balancín, siendo 2 veces la unidad.

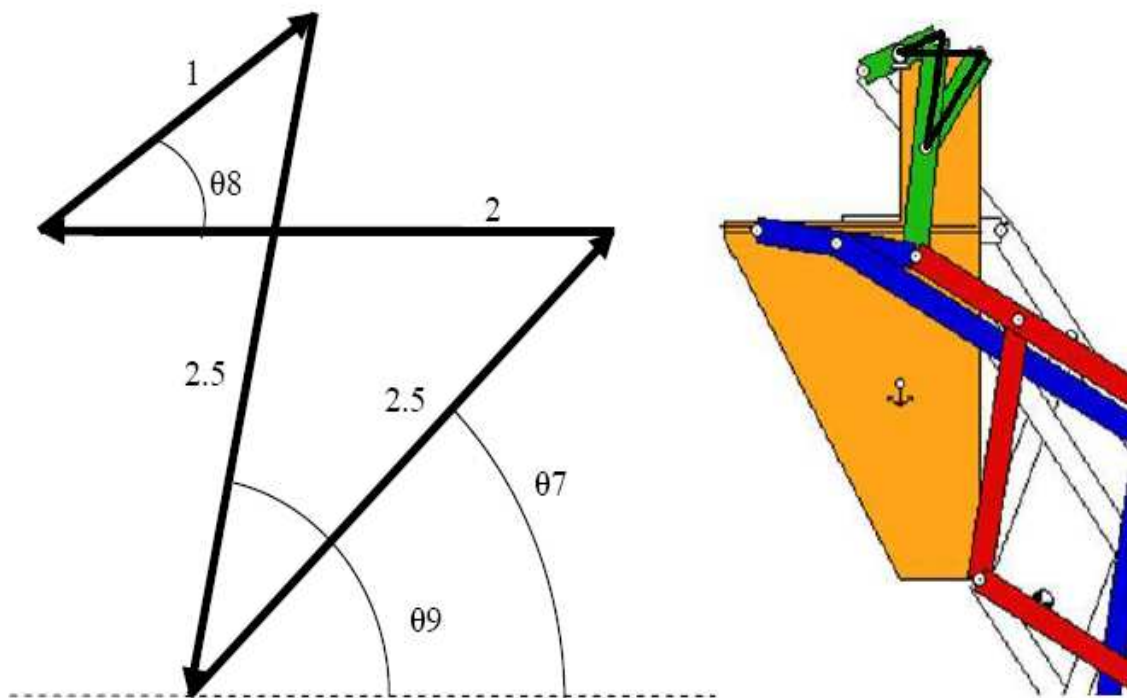


Figura 28. Relación de proporciones del mecanismo Chebyshev.

Como se sabe que las distancias entre los puntos de las articulaciones son fijas y tomando los ángulos que cada eslabón forma con la horizontal, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones en el eje x y en el eje y:

$$\begin{cases} 2,5 \cdot \cos \vartheta_7 - 2,5 \cdot \cos \vartheta_9 + 2 - \cos \vartheta_8 = 0 \\ 2,5 \cdot \sin \vartheta_7 - 2,5 \cdot \sin \vartheta_9 - \sin \vartheta_8 = 0 \end{cases} \rightarrow \vartheta_7, \vartheta_9$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se obtendrá θ_7 y θ_9 . Los sistemas de ecuaciones de las relaciones de cierre 1 y 2 son del tipo:

$$\begin{cases} A \cdot \cos \alpha + B \cdot \cos \beta + C = 0 \\ A \cdot \sin \alpha + B \cdot \sin \beta + D = 0 \end{cases}$$

Y tienen dos soluciones posibles:

Ecuación 1:

$$\cos \alpha = \frac{C \cdot (B^2 - A^2 - C^2 - D^2) + D \cdot \sqrt{4 \cdot A^2 \cdot (C^2 + D^2) - (B^2 - A^2 - C^2 - D^2)^2}}{2 \cdot A \cdot (C^2 + D^2)}$$

Ecuación 2:

$$\cos \beta = \frac{C \cdot (A^2 - B^2 - C^2 - D^2) - D \cdot \sqrt{4 \cdot B^2 \cdot (C^2 + D^2) - (A^2 - B^2 - C^2 - D^2)^2}}{2 \cdot B \cdot (C^2 + D^2)}$$

Los términos que se deben usar para resolver las ecuaciones 1 y 2 son por tanto:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \theta_7 & A = 2,5 & C = 2 \cdot \cos(\theta_8) \\ \beta = \theta_9 & B = -2,5 & D = -\sin(\theta_8) \end{array}$$

Y las ecuaciones que se tendrán que resolver para cada instante de θ_8 son:

$$\begin{cases} \theta_7 = \arccos \left(\frac{-4 \cdot \cos(\theta_8)^2 + 13 \cdot \cos(\theta_8) - 10 + \sin(\theta_8) \cdot \sqrt{(-16 \cdot (\cos(\theta_8)))^2 - 60 \cdot \cos(\theta_8) + 100}}{25 - 20 \cdot \cos(\theta_8)} \right) \\ \theta_9 = \arccos \left(\frac{-4 \cdot \cos(\theta_8)^2 + 13 \cdot \cos(\theta_8) - 10 - \sin(\theta_8) \cdot \sqrt{(-16 \cdot (\cos(\theta_8)))^2 - 60 \cdot \cos(\theta_8) + 100}}{-25 + 20 \cdot \cos(\theta_8)} \right) \end{cases}$$

4.1.2. Relación de cierre 2: Semipantógrafo

La segunda relación de cierre, el Semipantógrafo, esta compuesta por 4 eslabones y consta del balancín, 2,5 veces la unidad; de la distancia existente entre el punto de apoyo del balancín y del tendón inferior que son 12 veces la mitad de la manivela motor; del eslabón tendón inferior de 6 veces la unidad; la distancia entre la unión de tendón inferior y fémur hasta la unión de estabilizador y fémur que son 3 veces la unidad y la mitad de la biela, siendo 2,5 veces la unidad para cerrar el sistema.

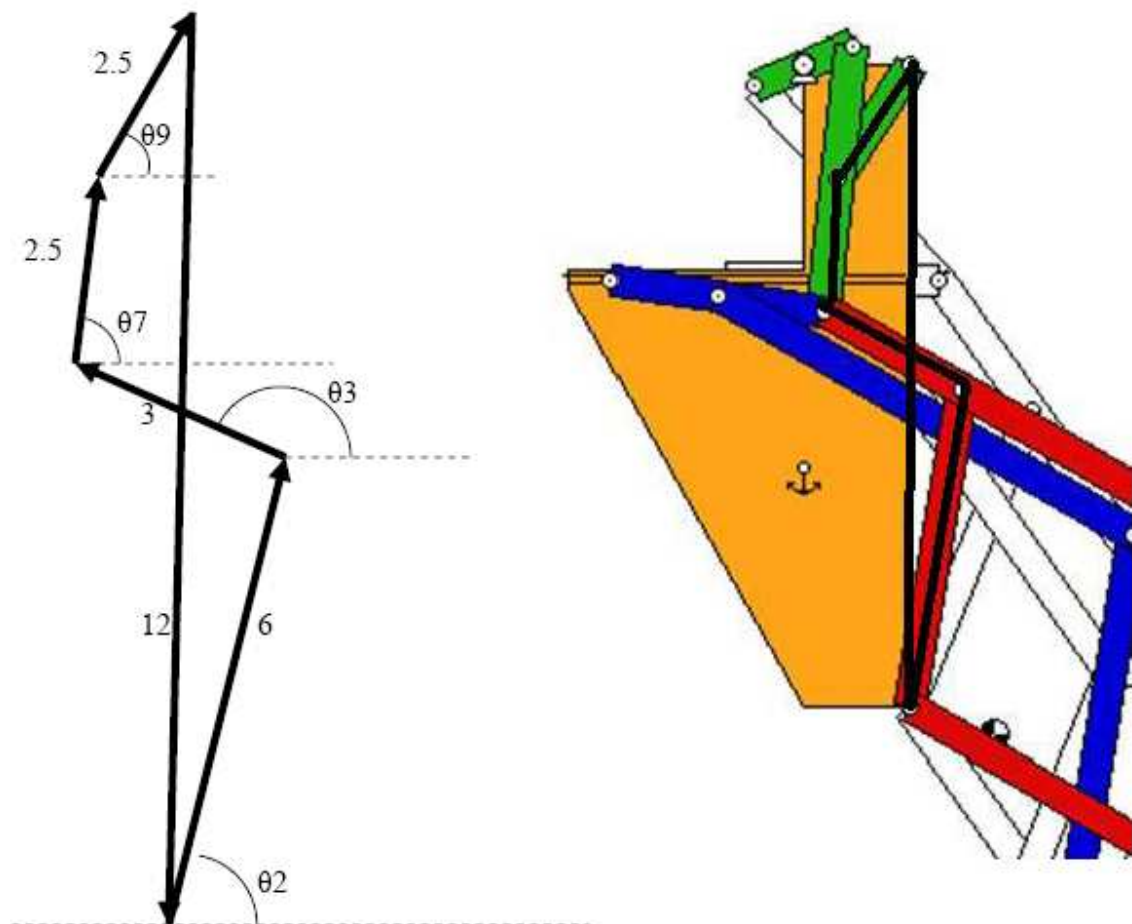


Figura 29. Relación de proporciones del Semipantógrafo.



Utilizando los mismos principios que en la relación de cierre 1, las distancias entre rotulas se mantienen y tomando los ángulos que forman con la horizontal, volvemos a plantear las ecuaciones de la relación de cierre 2:

$$\begin{cases} 6 \cdot \cos \vartheta_2 + 3 \cdot \cos \vartheta_3 + 2,5 \cdot (\cos \vartheta_7 + \cos \vartheta_9) = 0 \\ 6 \cdot \sin \vartheta_2 + 3 \cdot \sin \vartheta_3 + 2,5 \cdot (\sin \vartheta_7 + \sin \vartheta_9) - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \vartheta_2, \vartheta_3$$

Los términos que se deben usar para resolver las ecuaciones son:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \theta_2 & A = 6 & C = 2,5(\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9)) \\ \beta = \theta_3 & B = 3 & D = 2,5(\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9)) - 12 \end{array}$$

Las ecuaciones que se deben resolver al final son:

$$\begin{cases} D^2 + C^2 = (2,5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9)))^2 + (2,5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9)))^2 \\ \theta_2 = \arccos \left(\frac{(2,5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9))) \cdot (-27 - (D^2 + C^2)) - (2,5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9)) - 12) \cdot \sqrt{(144 \cdot (D^2 + C^2) - (-27 - (D^2 + C^2)))}}{12 \cdot (D^2 + C^2)} \right) \\ \theta_3 = \arccos \left(\frac{(2,5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9))) \cdot (-27 - (D^2 + C^2)) + (2,5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9)) - 12) \cdot \sqrt{(36 \cdot (D^2 + C^2) - (27 - (D^2 + C^2)))}}{6 \cdot (D^2 + C^2)} \right) \end{cases}$$

4.1.3. Relación de cierre 3: Estabilizador

La relación de cierre del estabilizador esta compuesta por 2 eslabones. Consta del eslabón de la mitad de la manivela motor, la unidad; de la biela en completo, que son 5 veces la unidad; del eslabón estabilizador de 4,2 veces la unidad; de la distancia X_{11} que es incógnita y de la distancia del extremo del final de la guía hasta el centro de la manivela motor que son 4 veces la unidad.

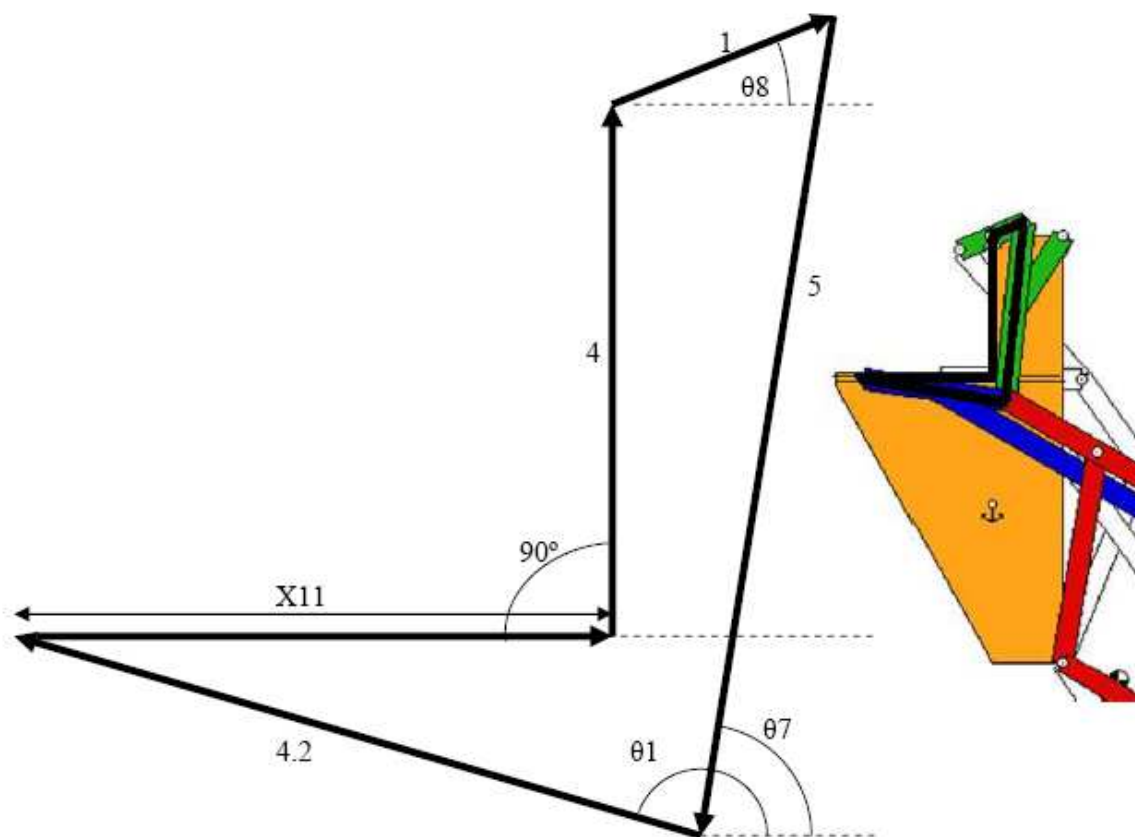


Figura 30. Relación de proporciones del Estabilizador.



Utilizando los mismos principios que en la relación de cierre 1 y 2, las distancias entre rotulas se mantienen y tomando los ángulos que forman con la horizontal, se plantea la última relación de cierre, la tercera:

$$\begin{cases} 4,2 \cdot \cos \vartheta_1 - x_{11} - 5 \cdot \cos \vartheta_7 + \cos \vartheta_8 = 0 \\ 4,2 \cdot \sin \vartheta_1 - 5 \cdot \sin \vartheta_7 + \sin \vartheta_8 + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \vartheta_1, x_{11}$$

La solución que se obtiene de las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= \frac{5 \cdot \sin(\theta_7) - \sin(\theta_8) - 4}{4,2} \\ X_{11} &= 4,2 \cdot \cos(\theta_1) - 5 \cdot \cos(\theta_7) + \cos(\theta_8) \end{aligned}$$

X_{11} es la distancia horizontal de la corredera con respecto al punto de apoyo de la manivela, en escala reducida. Si se quisiera saber la verdadera distancia, se debería multiplicar por la longitud de la mitad de la manivela motor, en nuestro caso 30mm.

4.1.4. Representación de los ángulos

Con los cálculos realizados anteriormente, ya se conoce en función del ángulo de la manivela motor (θ_8) los valores de: θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_7 , θ_9 y X_{11} .

Por paralelismo se sabe que los ángulos tienen las siguientes relaciones:

$$\theta_{10} = \theta_5 = \theta_1$$

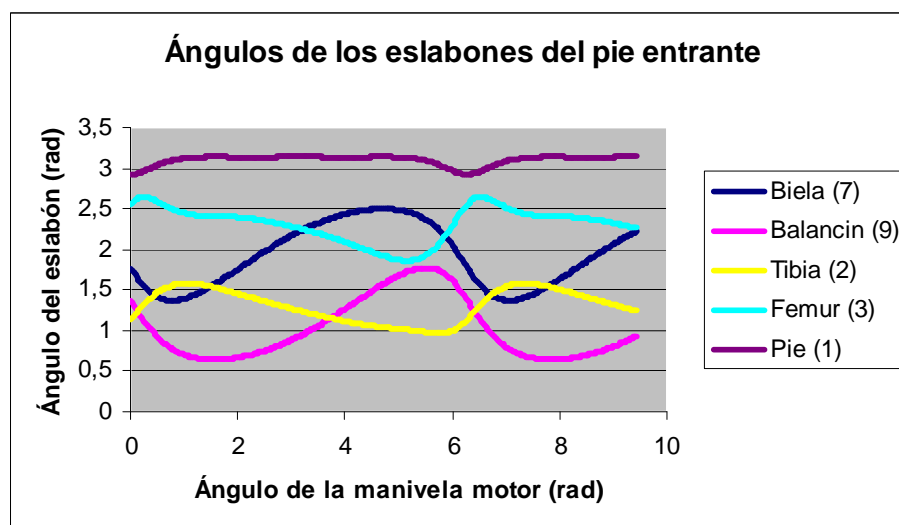
$$\theta_{12} = \theta_4 = \theta_3$$

$$\theta_{13} = \theta_6 = \theta_2$$

Con el sistema de referencia escogido, que se encuentra ligado a la cadera y esta fijo, el ángulo θ_{14} es cero.

Con este último dato ya son conocidos todos los ángulos y las distancias, con lo cual se conoce la posición de cualquier punto en función del ángulo de la manivela motor (θ_8).

Utilizando las ecuaciones anteriores, se realiza la siguiente Gráfica 1 en función de la manivela motor (θ_8), tomando los valores desde 0 a 3π para ver completarse una vuelta y media.



Gráfica 1. Ángulos de los eslabones del pie entrante.

4.2. Centro de masas del PASIBOT

El centro de masas del PASIBOT se calculará respecto a un sistema de coordenadas fijo que se encuentra en la esquina superior izquierda del eslabón cadera, como se pudo ver en la Figura 26 anterior.

Las siguientes ecuaciones de centro de masas corresponden tanto al pie entrante, como al pie saliente, con la salvedad del desfase existente en ángulos de 180° entre ambos pies.

Centro de masas del eslabón 1 – pie:

- $rcm_{1x} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 - 33 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1)$
- $rcm_{1y} = -360 - l_4 \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \sin \vartheta_2$

Centro de masas del eslabón 2 – tibia:

- $rcm_{2x} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - \frac{l_2}{2}) \cdot \cos \vartheta_2$
- $rcm_{2y} = -360 - l_4 \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - \frac{l_2}{2}) \cdot \sin \vartheta_2$

Centro de masas del eslabón 3 – fémur:

- $rcm_{3x} = 60 + l_6 \cdot \cos \vartheta_2 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) - \frac{l_3}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_3)$
- $rcm_{3y} = -360 + l_6 \cdot \sin \vartheta_2 - l_4 \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) + \frac{l_3}{2} \cdot \sin(\pi - \vartheta_3)$

Centro de masas del eslabón 4 – tendón inferior:

- $rcm_{4x} = 60 + \frac{l_4}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_3)$
- $rcm_{4y} = -360 - \frac{l_4}{2} \cdot \sin(\pi - \vartheta_3)$

Centro de masas del eslabón 5 – rodilla:

- $rcm_{5x} = 60 + l_6 \cdot \cos \vartheta_2 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) - \frac{l_5}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_1)$
- $rcm_{5y} = -360 + l_6 \cdot \text{sen} \vartheta_2 - l_4 \cdot \text{sen}(\pi - \vartheta_3) + \frac{l_5}{2} \cdot \text{sen}(\pi - \vartheta_1)$

Centro de masas del eslabón 6 – tendón superior:

- $rcm_{6x} = 60 + \frac{l_6}{2} \cdot \cos \vartheta_2$
- $rcm_{6y} = -360 + \frac{l_6}{2} \cdot \text{sen} \vartheta_2$

Centro de masas del eslabón 7 – biela:

- $rcm_{7x} = \frac{l_8}{2} \cdot \cos \vartheta_8 - \frac{l_7}{2} \cdot \cos \vartheta_7$
- $rcm_{7y} = \frac{l_8}{2} \cdot \text{sen} \vartheta_8 - \frac{l_7}{2} \cdot \text{sen} \vartheta_7$

Centro de masas del eslabón 8 – manivela motor:

- $rcm_{8x} = 0$
- $rcm_{8y} = 0$

Centro de masas del eslabón 9 – balancín:

- $rcm_{9x} = 60 - \frac{l_9}{2} \cdot \cos \vartheta_9$
- $rcm_{9y} = -\frac{l_9}{2} \cdot \text{sen} \vartheta_9$

Centro de masas del eslabón 10 – estabilizador:

- $rcm_{10x} = \frac{l_8}{2} \cdot \cos \vartheta_8 - l_7 \cdot \cos \vartheta_7 - \frac{l_{10}}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_1)$
- $rcm_{10y} = \frac{l_8}{2} \cdot \text{sen} \vartheta_8 - l_7 \cdot \text{sen} \vartheta_7 + \frac{l_{10}}{2} \cdot \text{sen}(\pi - \vartheta_1)$

Centro de masas del eslabón 12 – contrafémur:

$$\begin{aligned} \bullet rcm_{12x} &= \frac{l_8}{2} \cdot \cos \vartheta_8 - l_7 \cdot \cos \vartheta_7 - \frac{l_{10}}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) + \frac{l_{12}}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) \\ \bullet rcm_{12y} &= \frac{l_8}{2} \cdot \sin \vartheta_8 - l_7 \cdot \sin \vartheta_7 + \frac{l_{10}}{2} \cdot \sin(\pi - \vartheta_1) - \frac{l_{12}}{2} \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) \end{aligned}$$

Centro de masas del eslabón 13 – peroné:

$$\begin{aligned} \bullet rcm_{13x} &= \frac{l_8}{2} \cdot \cos \vartheta_8 - l_7 \cdot \cos \vartheta_7 - \frac{l_{10}}{2} \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) + l_{12} \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) - \frac{l_{13}}{2} \cdot \cos \vartheta_2 \\ \bullet rcm_{13y} &= \frac{l_8}{2} \cdot \sin \vartheta_8 - l_7 \cdot \sin \vartheta_7 + \frac{l_{10}}{2} \cdot \sin(\pi - \vartheta_1) - l_{12} \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) - \frac{l_{13}}{2} \cdot \sin \vartheta_2 \end{aligned}$$

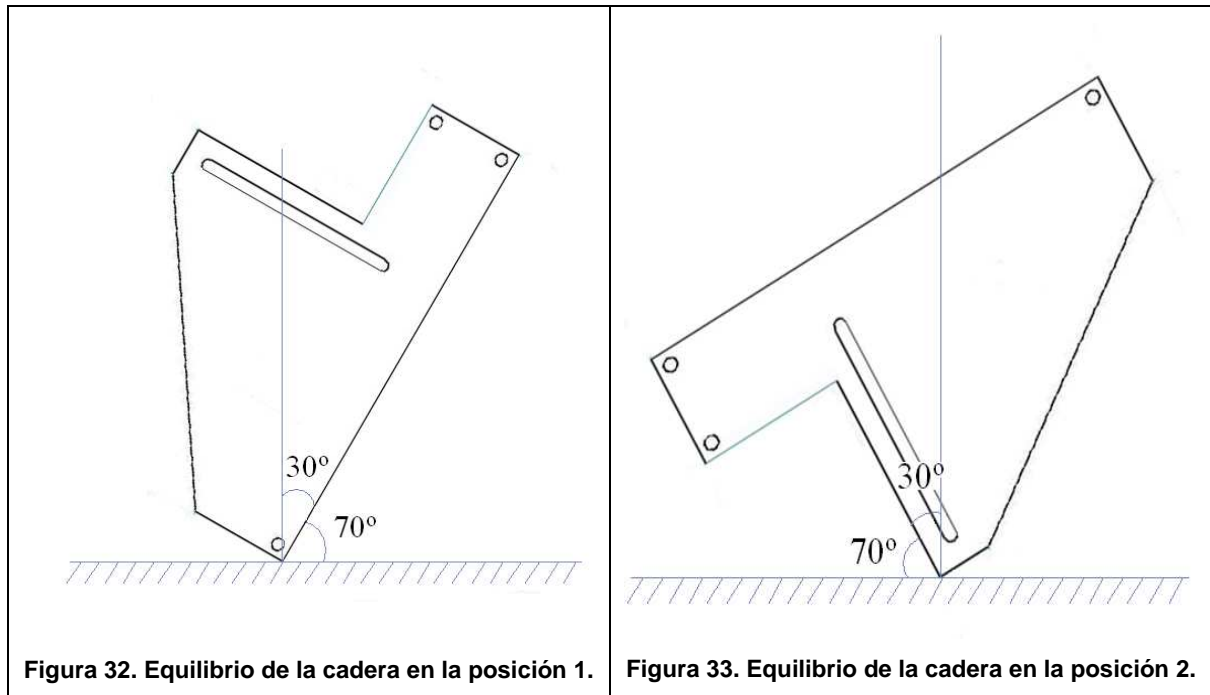
Centro de masas del eslabón 14 - cadera:

El cálculo del centro de masas de la cadera, debido a que se quiere hacer lo mas parecido a la realidad del diseño que se esta construyendo, no puede ser considerada la cadera como una lámina de aluminio homogénea con un añadido del motor como masa puntual como pudo considerarse en anteriores proyectos. En la actualidad, la cadera esta compuesta por varias laminas de aluminio, en la que se la han realizado varios vaciados y taladros, además de un motor eléctrico, un sistema de transmisión por correa, elementos de electrónica para el control del PASIBOT mediante el ordenador y el cableado eléctrico.

Por la complejidad expuesta anteriormente, se optó por determinar el centro de masas de la cadera experimentalmente, basándose en el hecho de que un objeto apoyado sobre un plano horizontal está en equilibrio cuando la proyección de su centro de masas sobre dicho plano pertenece a la superficie de apoyo. Para ello se colocó la pieza "cadera" sobre un plano horizontal, apoyándose en dos vértices diferentes. El C.M. se determino por la intersección de las normales correspondientes. (Ver Figura 33, Figura 34 y Figura 35). Se midieron los ángulos formados con la pieza y la horizontal del suelo con el goniómetro de la Figura 31.



Figura 31. Goniómetro similar al utilizado para medir los ángulos.



En la Figura 32 y en la Figura 33 se puede ver las posiciones de equilibrio en la que se colocó la cadera. Para encontrar el centro de masas se hará mediante el cruce de ambas líneas, cuyas ecuaciones son obtenidas de coger dos puntos de cada una, obteniendo la ordenada en el origen y la pendiente e igualando entre ellas, para tener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = b + m \cdot x$$

Ecuación 1		Ecuación 2	
X_1	Y_1	X_2	Y_2
0	110	65,66	110
210	231,24	210	360

Tabla 6. Coordenadas de las ecuaciones de equilibrio de la cadera.

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = 110 + 0,58 \cdot X_1 \\ Y_2 = -5,4 + 1,74 \cdot X_2 \end{array} \right\} 110 + 0,58 \cdot X = -5,4 + 1,74 \cdot X \rightarrow (99,48, 167,7)$$

En la siguiente imagen se ve la situación del centro de masas en el sistema de referencia calculado:

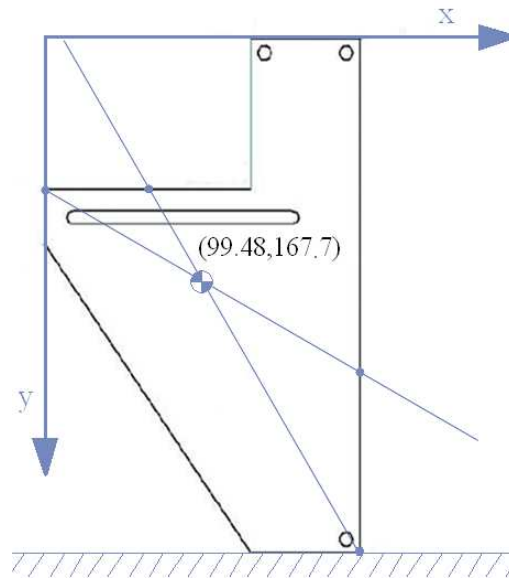


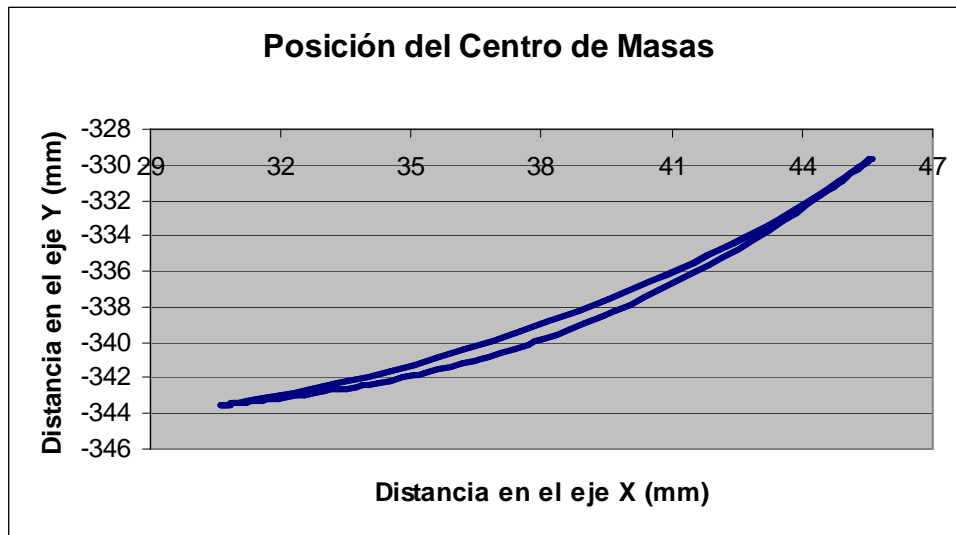
Figura 34. Situación del Centro de Masas en el sistema de referencia auxiliar.

El área de la cadera es $A_{14} = 34350 \text{ mm}^2$ y si se calcula el centro de masas con el sistema de referencia anterior sin considerar los añadidos y las modificaciones del modelo real se tiene: $rcm_{14} = (151.8, 182.33)$. Lo que significa que el centro de masas se ha desplazado 52,38mm hacia la izquierda y 14,63mm hacia arriba respecto de lo calculado en un principio sin considerar los cambios realizados en la realidad.

Con lo calculado anteriormente, se utilizará la siguiente fórmula para obtener el centro de masas del PASIBOT en cada instante y dependiendo siempre de θ_8 para X e Y:

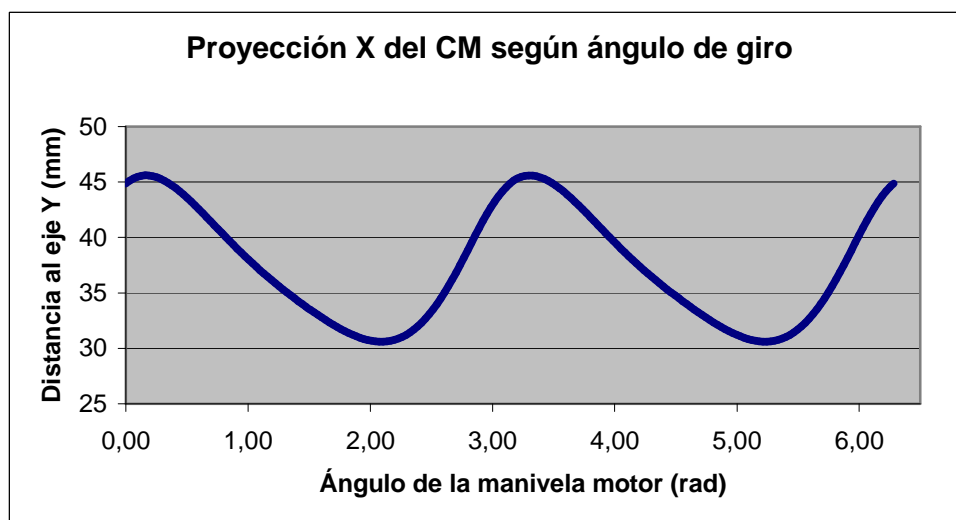
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores para cada instante del ángulo de la manivela motor θ_8 , se dibuja la siguiente gráfica de la posición del centro de masas en cada momento del recorrido de ambos pies para los ejes X e Y del sistema de referencia elegido anteriormente:



Gráfica 2. Posición del centro de masas a lo largo del paso.

Utilizando los mismos datos anteriores de la posición del centro de masas, se representa la distancia existente al eje Y del centro de masas en función del ángulo de la manivela motor θ_8 :



Gráfica 3. Proyección X del centro de masas según el ángulo de giro de la manivela motor.

5. ESTABILIDAD DEL PASIBOT

En este apartado se realizará el estudio de la estabilidad del PASIBOT a lo largo de la trayectoria de un paso completo. Para ello se tendrá en cuenta la situación del centro de masas respecto a nuestro sistema de referencias, a la vez de, la posición del pie o pies apoyados en ese momento en el suelo.

El mantener el equilibrio al caminar es la parte más importante del ciclo de pasos de los robots caminantes y para ello, el equilibrio se da cuando:

1º La suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas, incluidas la de inercia, es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x}, \sum_{i=1}^n F_{i,y}, \sum_{i=1}^n F_{i,z}$$

2º La suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto cualquier línea (cualquier punto para fuerzas coplanares) es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^n M_{i,x}, \sum_{i=1}^n M_{i,y}, \sum_{i=1}^n M_{i,z}$$

En el caso de este proyecto, se considerará el movimiento del bípodo suficientemente lento como para realizar la aproximación estática, despreciando las fuerzas de inercia. De esta forma, la única fuerza que actúa es la del propio peso, aplicada en el centro de masas.

La estabilidad de los robots, se puede conseguir de dos formas diferentes: estáticamente y dinámicamente. Un equilibrio estático, es aquel que mantiene el centro de masa dentro del área de soporte que proporcionan ambos pies, es decir, el cuerpo se acomoda de acuerdo a la posición de los pies. Por otro lado el equilibrio dinámico, es aquel que permite que el centro de masa, se desplace fuera del área de soporte otorgada por los pies, lo que en algunos puntos del ciclo de caminar, el robot se encuentra fuera de equilibrio, cayendo hacia delante o atrás, y es necesario mover

un pie (o pierna), para detener esta caída, y lograr la desaceleración para llegar a equilibrio nuevamente.

Entre las dos formas de clasificación anterior para conseguir la estabilidad en los robots actuales, el PASIBOT es del tipo estático, y su centro de masas siempre debe de caer dentro de la proyección de un pie apoyado o entre ambos pies apoyados para no caerse a la hora de realizar un paso. Sin embargo, esto puede no darse por una mala distribución de masas, por lo que se deberá comprobar el equilibrio y ver posibles problemas que se puedan plantear.

Se diferenciarán tres etapas para la realización del paso completo en este estudio de estabilidad:

En la primera, el pie saliente está apoyado en suelo y el pie entrante aún está en el aire. En esta fase se deberá comprobar tres posibles sucesos que pueden acontecer respecto a la estabilidad del robot: A) El centro de masas queda por detrás de la base del pie saliente, provocando el vuelco del bípodo hacia atrás, B) el centro de masas se mantiene dentro de la base del pie saliente manteniéndose en equilibrio y C) el centro de masas se adelanta al pie saliente provocando lo que llamaremos como transferencia adelantada de masa, haciendo que el robot vuelque hacia delante. (Ver Figura 35).

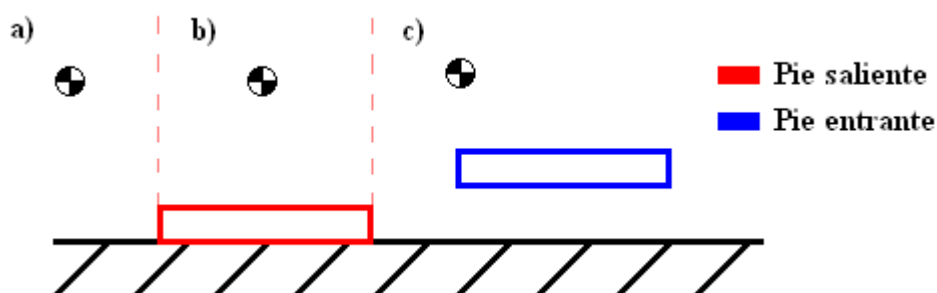


Figura 35. Primera etapa del paso.

En la segunda etapa del paso a estudiar, ambos pies se encuentran apoyados en el suelo. Los sucesos que serán estudiados en esta etapa serán: A) Cuando el centro de masas se quede nuevamente atrasado respecto al pie saliente y continúe

volcando hacia atrás y B) El centro de masas se traslada desde el pie saliente hasta el pie entrante. (Ver Figura 36).

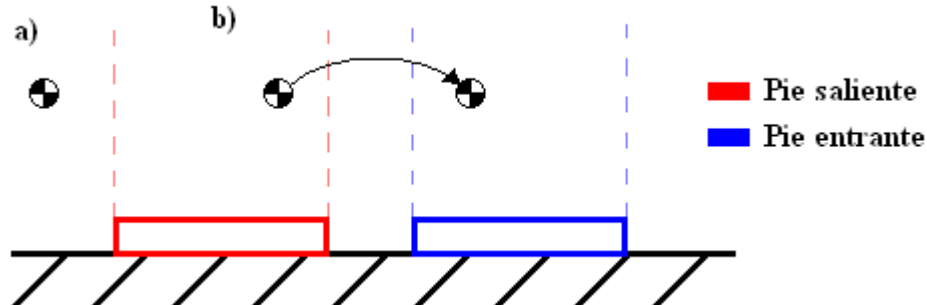


Figura 36. Segunda etapa del paso.

Por última, la tercera etapa será aquella en la que el pie saliente se ha levantado del suelo, y el PASIBOT se encuentra apoyado con el pie entrante sobre el suelo. Se tendrá de nuevo dos casos de estudio: A) El centro de masas queda detrás del pie entrante, lo que se llamará transferencia atrasada de masa y B) el centro de masas se sitúa dentro de la proyección del pie entrante. (Ver Figura 37).

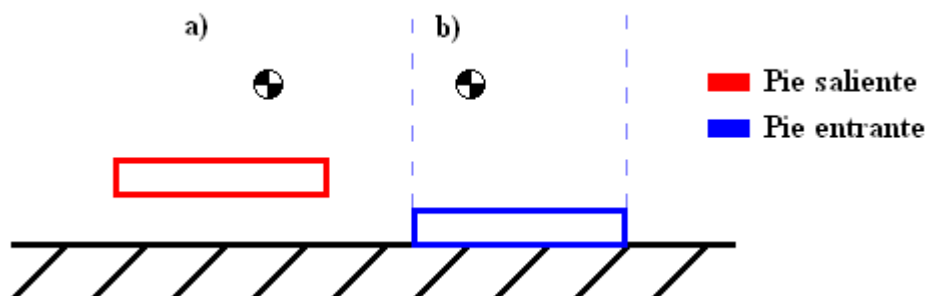
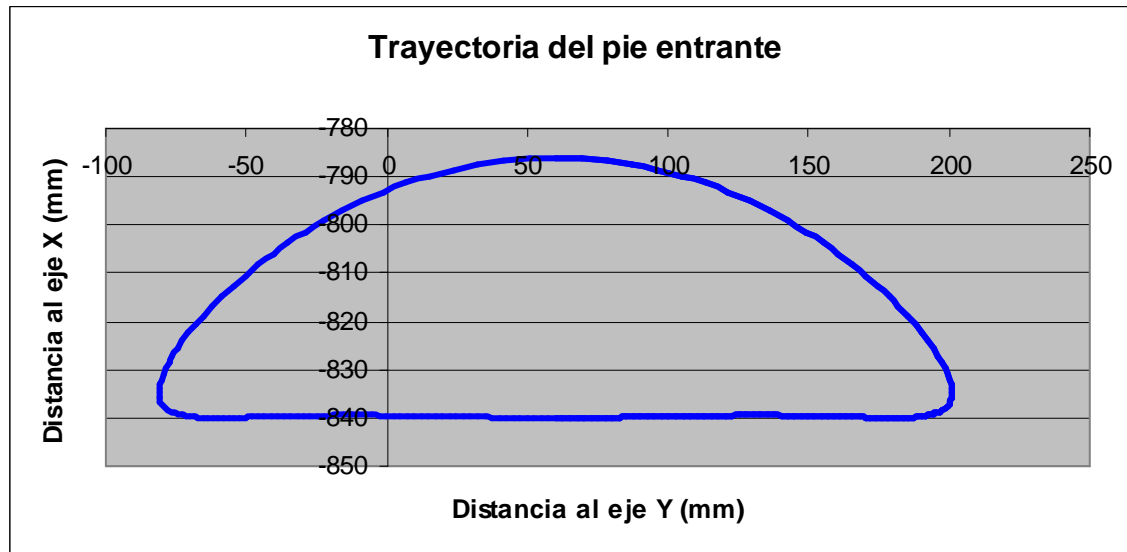


Figura 37. Tercera etapa del paso.

Para ver cuándo un pie está elevado del suelo o cuándo está apoyado se empleará un criterio que nos diga en qué rango de altura respecto al eje Y consideramos apoyado o levantado el pie, debido a dos razones: La trayectoria que sigue el pie del PASIBOT cuando se encuentra apoyado en el suelo no es totalmente recta, si no que varía debido a la propia cinemática que sigue el mecanismo utilizado. Esta característica mecánica se puede observar en la siguiente Gráfica 4, en donde no se mantiene constante a la altura de 840mm sino que existe una variación de alturas en el tramo que se encuentra apoyado el pie:



Gráfica 4. Trayectoria del pie entrante.

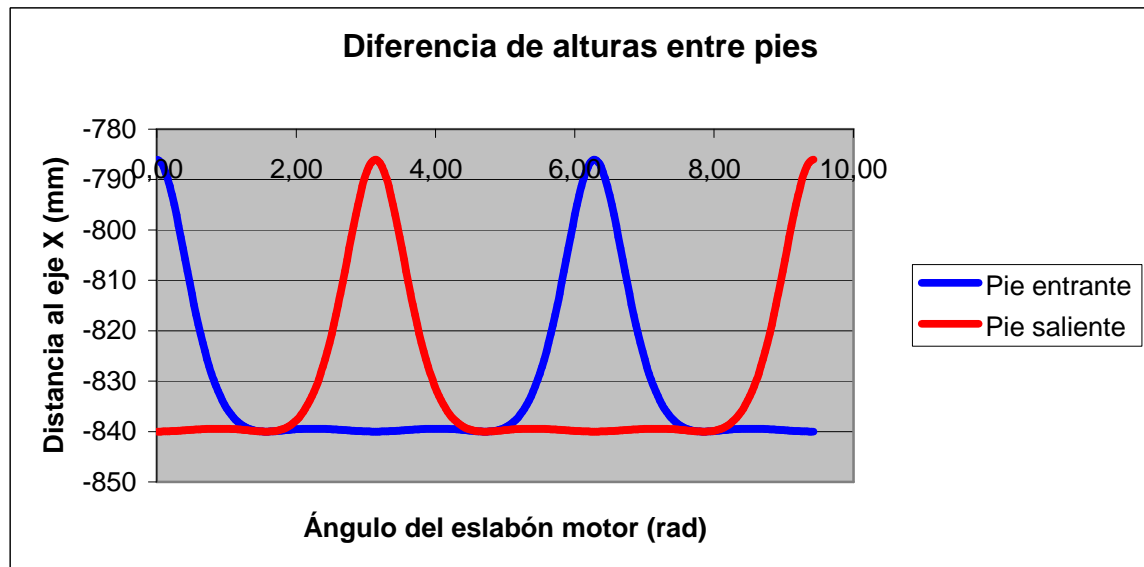
La segunda razón es la existencia de holguras en las juntas a la hora del montaje y la existencia de deformaciones elásticas que se producen en el mecanismo a consecuencia de su propio peso y de las fuerzas que actúan en las articulaciones.

Considerando las razones anteriormente mencionadas, diremos que la condición de apoyo se da cuando la posición del pie se encuentra entre el rango de -838mm y -840mm de distancia al eje X.

Al conocer los valores de los ángulos que forman los eslabones con la horizontal, se está en disposición de conocer la posición de cualquier punto del mecanismo. Con lo que, se pasa a calcular la posición del extremo de la tibia (eslabón 2) en donde se encuentra unido con el pie (eslabón 1). Se puede ver el desplazamiento de tal punto con los diferentes valores de θ_8 hasta completar los 360° siguiendo estas ecuaciones:

$$\begin{cases} r_{e21x} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 \\ r_{e21y} = -360 - l_4 \cdot \sin(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \sin \vartheta_2 \end{cases}$$

La trayectoria que seguirá el pie saliente será la misma salvo con un desfase de 180° en la manivela motor como se puede ver en la Gráfica 5, que representa la diferencia de alturas existentes a lo largo del recorrido de ambos pies:



Gráfica 5. Diferencia de alturas entre pies.

Viendo la Gráfica 5 anterior, se observa cuándo un pie se encuentra levantado y otro posado sobre el suelo, el instante en el que ambos pies se encuentran en el suelo, y para qué valores del ángulo del eslabón motor (θ_8) se da estas circunstancias para poder realizar un estudio de cada etapa individualmente.

Otros datos que se deberán de conocer, son las medidas del pie. Éstas se pueden observar en el esquema de la Figura 38 siguiente.

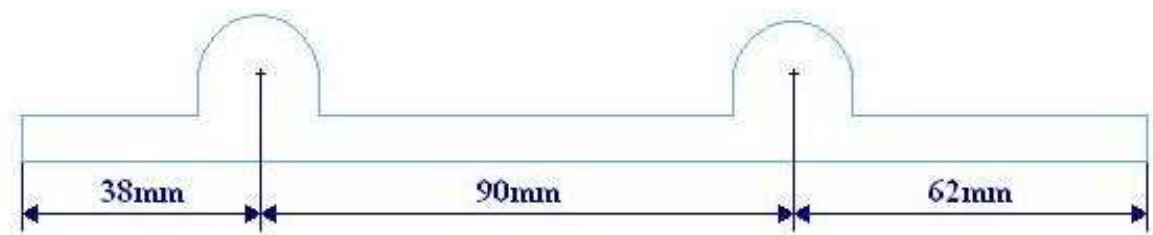


Figura 38. Perfil del pie.

5.1. Estudio de la estabilidad de la primera etapa del paso

La primera etapa comienza con el pie saliente apoyado en el suelo, y el pie entrante en el aire, situado justamente encima del pie saliente para la posición de la manivela motor (eslabón 8) que forma un ángulo de 0rad con la horizontal. Esta primera etapa durará hasta los 1,16rad ó 66,6° que es cuando el extremo de la posición de la tibia (eslabón 2) alcanza la segunda fase de ambos pies apoyados.

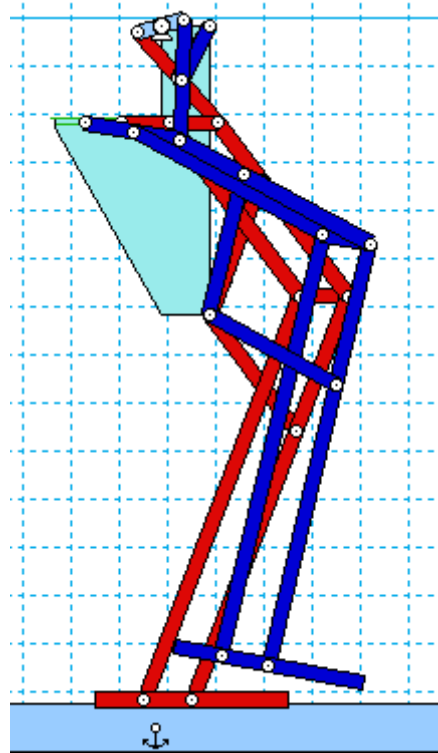
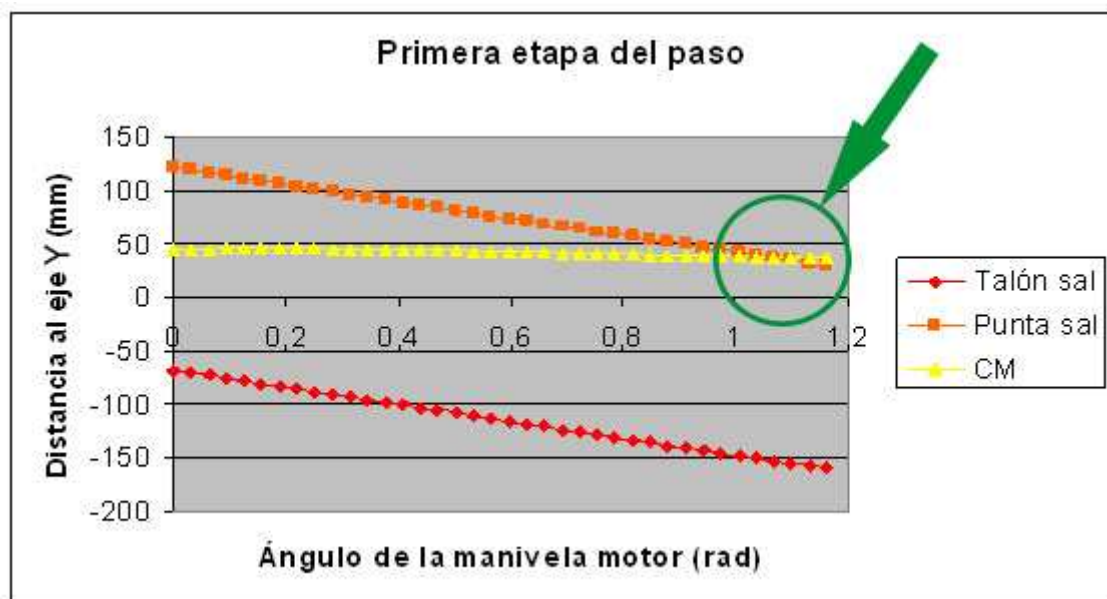


Figura 39. Captura del WorkingModel de la etapa 1 del paso.

Para comprobar la estabilidad del PASIBOT en esta etapa se desarrollan las siguientes fórmulas a lo largo del periodo acotado:

$$\begin{cases} r_{talon} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 - 128 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \\ r_{punta} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 + 62 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \end{cases}$$

Representan la proyección en el eje X del talón del eslabón pie y de la punta del mismo. Al representar ambas funciones a lo largo de esta etapa, se obtiene un rango numérico que simboliza cuándo el pie se encuentra apoyado en el suelo. Al dibujar en la misma gráfica la proyección X del centro de masas (Gráfica 6), se ve cómo se mantiene entre dicho rango anterior a excepción de los cuatro últimos puntos, en donde el centro de masas se sale de la base del pie por delante de la punta, provocando en ese instante lo que llamamos transferencia adelantada de masas, la hipótesis C) que fue considerada previamente.



Gráfica 6. Primera etapa del paso. El color rojo y naranja representan la proyección del pie saliente. En amarillo la proyección del centro de masas.

La siguiente Tabla 7 muestra los datos utilizados en la gráfica anterior de la etapa del primer paso. Se comprobó anteriormente que se producía una transferencia adelantada de masas en los últimos cuatro puntos como podemos comprobarlo numéricamente en la tabla. El primer punto en que el centro de masas supera la base del pie y se produce una transferencia adelantada de masas es en el momento que la manivela motor posee un ángulo de 1,07rad. En ese momento se encuentra a una altura respecto al eje y de -836,66mm ó a 2,66mm de lo que consideramos como pie apoyado. Por tanto, sufrirá una pequeña caída hacia delante de 2,66mm y por tanto se considerará que es demasiado pequeña la caída como para crear algún inconveniente.



Ángulo del motor θ_8 (rad)	Distancia al eje y del CM (mm)	Pie saliente	
		Talón (mm)	Punta (mm)
0,00	44,86	-68,00	122,00
0,03	45,12	-70,51	119,49
0,06	45,32	-73,03	116,97
0,09	45,47	-75,54	114,46
0,13	45,56	-78,05	111,95
0,16	45,60	-80,57	109,43
0,19	45,59	-83,08	106,92
0,22	45,53	-85,60	104,40
0,25	45,43	-88,11	101,89
0,28	45,30	-90,63	99,37
0,31	45,13	-93,15	96,85
0,35	44,92	-95,66	94,34
0,38	44,69	-98,18	91,82
0,41	44,44	-100,70	89,30
0,44	44,16	-103,22	86,78
0,47	43,86	-105,74	84,26
0,50	43,55	-108,25	81,75
0,53	43,22	-110,77	79,23
0,57	42,89	-113,29	76,71
0,60	42,54	-115,80	74,20
0,63	42,19	-118,31	71,68
0,66	41,83	-120,83	69,17
0,69	41,47	-123,33	66,67
0,72	41,11	-125,84	64,16
0,75	40,75	-128,34	61,66
0,79	40,39	-130,84	59,16
0,82	40,04	-133,33	56,67
0,85	39,68	-135,81	54,19
0,88	39,34	-138,29	51,71
0,91	38,99	-140,75	49,25
0,94	38,66	-143,21	46,79
0,97	38,33	-145,66	44,34
1,01	38,00	-148,10	41,90
1,04	37,68	-150,52	39,48
1,07	37,37	-152,93	37,07
1,10	37,06	-155,32	34,68
1,13	36,76	-157,69	32,31
1,16	36,47	-160,05	29,95

Tabla 7. Resultados del estudio de estabilidad de la primera etapa del paso. En diferente color los puntos en donde se produce la transferencia adelantada de masas.

5.2. Estudio de la estabilidad de la segunda etapa del paso

La segunda etapa del paso, la del doble apoyo, se encuentra acotada por el ángulo de la manivela motor entre $1,16\text{rad}$ y $1,98\text{rad}$ ($66,6^\circ$ y $113,4^\circ$).

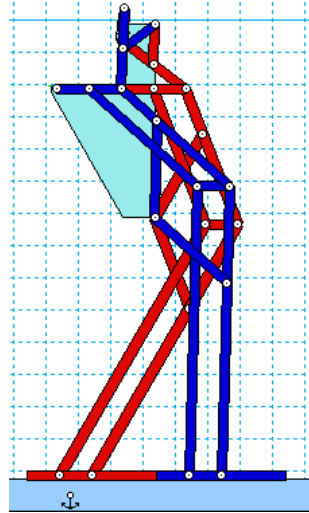
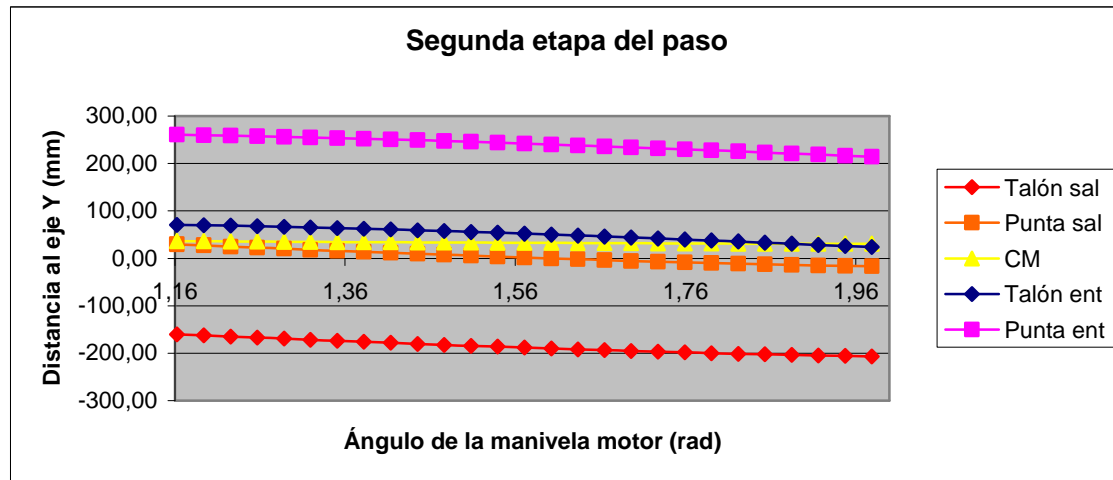


Figura 40. Captura del WorkingModel de la etapa 2 del paso.

Para seguir comprobando la estabilidad en esta segunda etapa, se volverá a utilizar la fórmula anteriormente usada, con la salvedad de la diferencia existente entre los ángulos del pie entrante y pie saliente ya calculados:

$$\begin{cases} r_{\text{talón}} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 - 128 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \\ r_{\text{punta}} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 + 62 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \end{cases}$$

En la siguiente Gráfica 7, la proyección en el eje X del pie saliente queda representado como el intervalo de las líneas roja y naranja, y la proyección X del pie entrante es representado por las funciones azul y rosa. La proyección en X del centro de masas corresponde a la línea amarilla, y se observa cómo se desplaza del pie saliente al pie entrante el centro de masas como la hipótesis B) mencionada anteriormente para la segunda etapa del paso.



Gráfica 7. Segunda etapa del paso. Azul y rosa pie entrante, rojo y naranja saliente.

Para realizar la Gráfica 7, se han utilizado los datos de la siguiente tabla.

Ángulo del motor θ_8 (rad)	Distancia al eje y del CM (mm)	Pie saliente		Pie entrante	
		Talón (mm)	Punta (mm)	Talón (mm)	Punta (mm)
1,16	36,47	-160,05	29,95	70,53	260,52
1,19	36,17	-162,38	27,62	69,64	259,64
1,23	35,89	-164,70	25,30	68,64	258,64
1,26	35,61	-166,98	23,02	67,54	257,54
1,29	35,33	-169,24	20,76	66,34	256,34
1,32	35,06	-171,48	18,52	65,05	255,05
1,35	34,79	-173,68	16,32	63,68	253,68
1,38	34,52	-175,84	14,16	62,22	252,22
1,41	34,26	-177,97	12,02	60,68	250,68
1,45	34,01	-180,07	9,93	59,08	249,08
1,48	33,75	-182,12	7,88	57,40	247,40
1,51	33,51	-184,13	5,87	55,66	245,66
1,57	33,02	-188,00	2,00	52,00	242,00
1,60	32,79	-189,86	0,14	50,09	240,09
1,63	32,57	-191,66	-1,66	48,13	238,13
1,67	32,35	-193,40	-3,40	46,12	236,12
1,70	32,14	-195,08	-5,08	44,07	234,07
1,73	31,93	-196,68	-6,68	41,98	231,98
1,76	31,74	-198,22	-8,22	39,84	229,84
1,79	31,56	-199,68	-9,68	37,68	227,68
1,82	31,39	-201,05	-11,05	35,48	225,48
1,85	31,23	-202,34	-12,34	33,24	223,24
1,88	31,09	-203,54	-13,54	30,98	220,98
1,92	30,96	-204,64	-14,64	28,70	218,70
1,95	30,85	-205,64	-15,64	26,39	216,38
1,98	30,76	-206,52	-16,53	24,05	214,05

Tabla 8. Resultados del estudio de estabilidad de la segunda etapa del paso.

5.3. Estudio de la estabilidad de la tercera etapa del paso

La tercera etapa, abarca la fase en la que el pie entrante se encuentra posado sobre tierra, y el pie saliente se eleva sobre el suelo hasta que se sitúa sobre la posición del pie entrante, por arriba. Los ángulos entre los que está comprendida esta fase son $1,98\text{rad}$ y πrad ($113,4^\circ$ y 180°). Después de esta etapa, volvería a comenzar el ciclo de las tres etapas del paso para completar una vuelta completa la manivela motor.

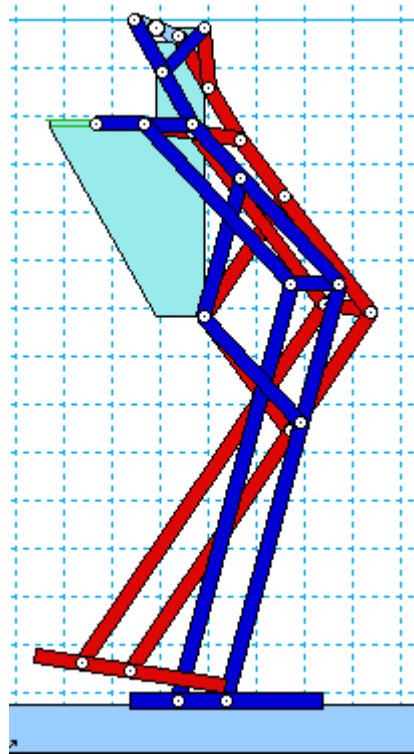
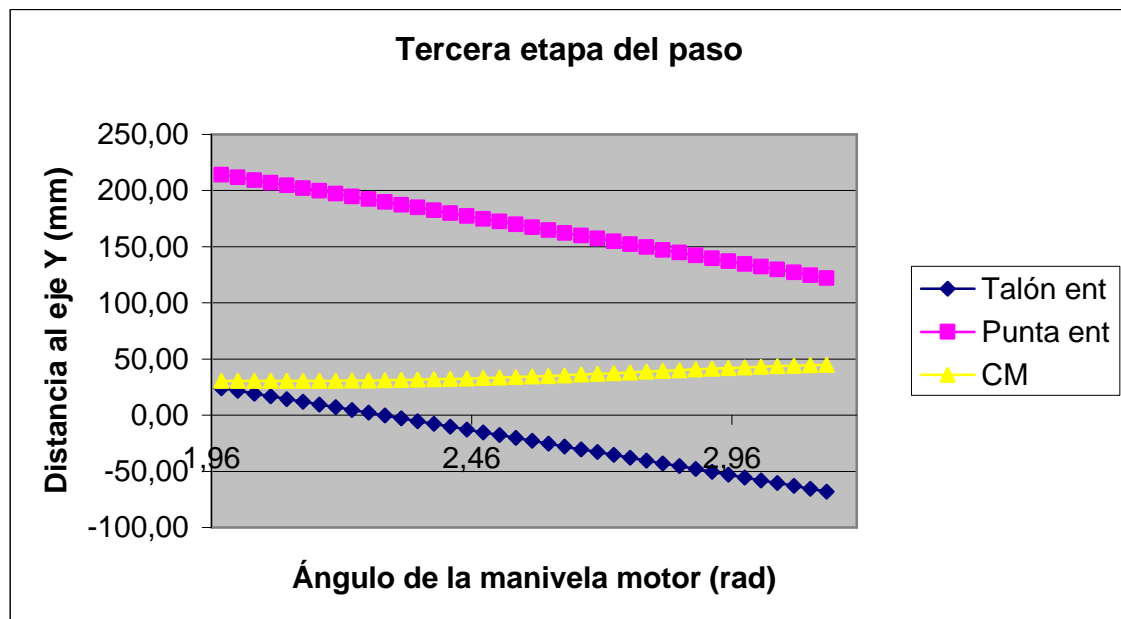


Figura 41. Captura del WorkingModel de la etapa 3 del paso.

Se utilizarán las mismas fórmulas que en los dos apartados anteriores para hacer la representación gráfica de la tercera etapa del paso:

$$\begin{cases} r_{\text{talón}} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 - 128 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \\ r_{\text{punta}} = 60 + l_4 \cdot \cos(\pi - \vartheta_3) + (l_6 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2 + 62 \cdot \cos(\pi - \vartheta_1) \end{cases}$$

El color azul en la Gráfica 8 representa el talón y el color rosa la punta del pie entrante. Con ello se comprueba de nuevo cómo el centro de masas, línea amarilla, continúa estando dentro de los márgenes del pie, dándose de nuevo el caso B) que se expuso anteriormente para la tercera etapa del paso. Por tanto el equilibrio del robot continúa siendo correcto y dentro de la base del pie entrante en este caso, aunque se ve mas próximo el vuelco hacia atrás que hacia adelante.



Gráfica 8. Tercera etapa del paso. El azul y rosa representan la proyección en X del pie entrante. En amarillo la proyección en X del centro de masas.

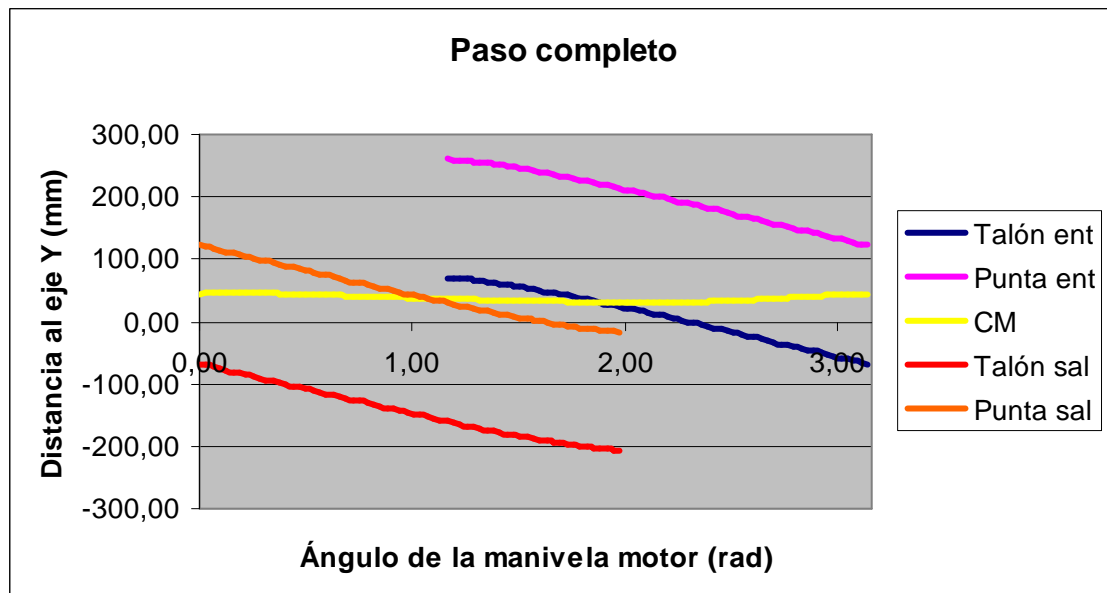
Los datos que se han utilizado para realizar la Gráfica 8 son los obtenidos de la siguiente Tabla 9.

Ángulo del motor θ_8 (rad)	Distancia al eje y del CM (mm)	Pie entrante	
		Talón (mm)	Punta (mm)
1,98	30,76	24,05	214,05
2,01	30,69	21,69	211,69
2,04	30,64	19,32	209,32
2,07	30,61	16,93	206,93
2,10	30,61	14,52	204,52
2,14	30,64	12,10	202,10
2,17	30,69	9,66	199,66
2,20	30,78	7,21	197,21
2,23	30,90	4,75	194,75
2,26	31,04	2,29	192,29
2,29	31,23	-0,19	189,81
2,32	31,45	-2,67	187,33
2,36	31,70	-5,16	184,84
2,39	31,99	-7,66	182,34
2,42	32,32	-10,16	179,84
2,45	32,68	-12,67	177,33
2,48	33,09	-15,17	174,83
2,51	33,53	-17,68	172,31
2,54	34,00	-20,20	169,80
2,58	34,51	-22,71	167,29
2,61	35,06	-25,23	164,77
2,64	35,63	-27,75	162,25
2,67	36,23	-30,26	159,74
2,70	36,86	-32,78	157,22
2,73	37,51	-35,30	154,70
2,76	38,17	-37,82	152,18
2,80	38,84	-40,34	149,66
2,83	39,52	-42,85	147,15
2,86	40,19	-45,37	144,63
2,89	40,85	-47,89	142,11
2,92	41,49	-50,40	139,60
2,95	42,10	-52,92	137,08
2,98	42,68	-55,43	134,57
3,02	43,22	-57,95	132,05
3,05	43,70	-60,46	129,54
3,08	44,14	-62,97	127,03
3,11	44,52	-65,49	124,51
3,14	44,84	-68,00	122,00

Tabla 9. Resultados del estudio de estabilidad de la tercera etapa del paso.

5.4. Paso completo

Para finalizar el estudio de la estabilidad del PASIBOT se realiza la Gráfica 9, que engloba las tres etapas anteriores del paso para tener una visión global del ciclo de un paso. Como se mencionó anteriormente, en el ciclo de un paso completo, la manivela motor recorre 180° para volver a comenzar de nuevo otro paso. En la gráfica se puede ver cómo los finales de las líneas del pie entrante acaban a la misma altura del comienzo de las líneas del pie saliente, existiendo continuidad en las funciones debido a que el pie entrante se convertiría en saliente y viceversa. Por tanto en la vuelta completa de la manivela motor, 360° , el PASIBOT realiza dos pasos completos.



Gráfica 9. Realización de un paso completo.

6. FUERZAS

6.1. Fuerzas normales

Se obtendrá en este punto la fuerza normal ejercida por el PASIBOT sobre la superficie plana del suelo en cada una de las tres etapas del paso vistas anteriormente. Suponiendo un caminar prácticamente estático, esta fuerza será de igual magnitud y dirección perpendicular al suelo, pero de sentido contrario, al peso propio del PASIBOT según nos dicta la tercera ley de Newton o "Principio de acción y reacción": *Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: es decir, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas* [10].

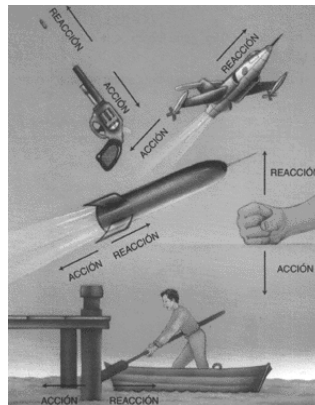


Figura 42. Cinco ejemplos de la Tercera Ley de Newton.

Para obtener dicha fuerza normal, se mantendrá el sistema de referencia usado a lo largo del proyecto, definiendo como fuerzas positivas aquellas que mantenga un sentido hacia arriba, negativas hacia abajo. Para los momentos, se ha optado que serán positivos aquellos que giren en el sentido de las agujas del reloj, y negativos serán aquellos que vayan en dirección opuesta a las agujas del reloj. Se deberán resolver las siguientes ecuaciones, tomando momentos desde el centro de masas. Como se está haciendo para el caso estático, sin considerar las aceleraciones y los momentos de inercia que puedan tener los distintos eslabones, se tendrá que igualar a cero:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_v = 0 \\ \sum M_{CM} = 0 \end{array} \right\}$$

6.1.1. Fuerza normal en la primera etapa del paso

La primera etapa del paso, limitada entre los ángulos del eslabón de la manivela motor θ_8 desde 0rad hasta 1,16rad, es con la que se encontraría el PASIBOT con el pie saliente únicamente apoyado en el suelo, por lo que éste sería el que aguantase todo el peso del robot. Sin embargo, se pudo ver en el apartado 5.1 que se daba una transferencia adelantada de masas, con lo que el pie entrante llegue a la etapa del doble apoyo cuando la manivela motor ha recorrido 1,07rad, en lugar de, 1,16rad como se estableció previamente para delimitar cada etapa del paso. El esquema de fuerzas al que esta solicitado el bípodo se ve en la siguiente Figura 43:

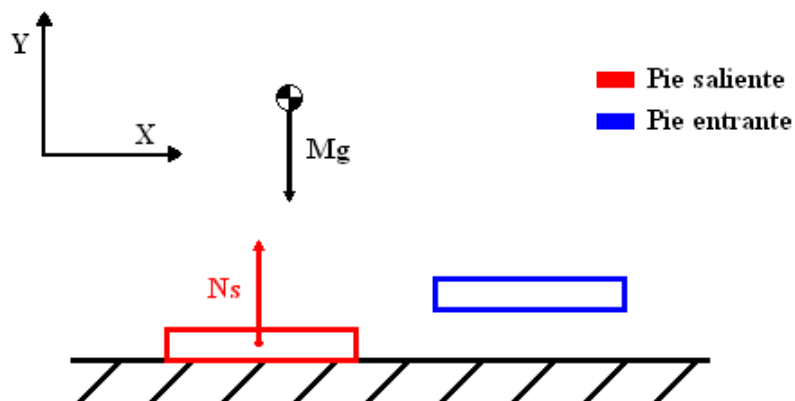
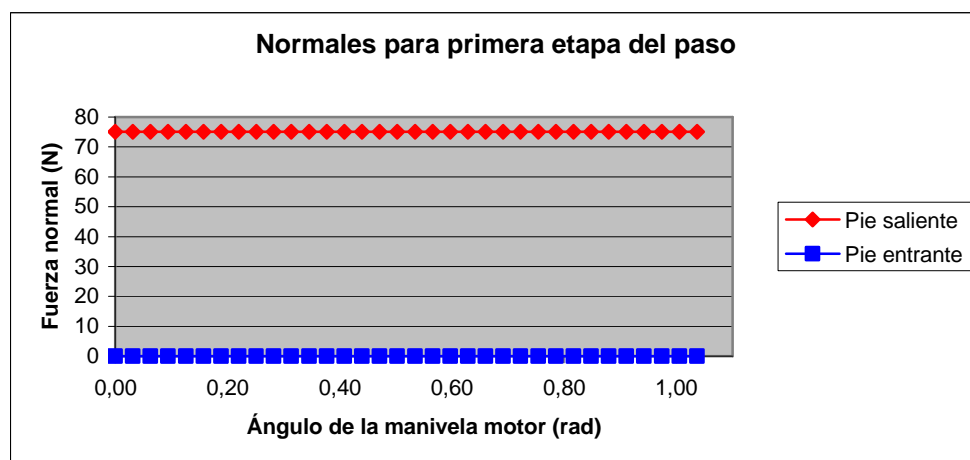


Figura 43. Esquema de fuerzas para la primera etapa del paso.

Se tiene por tanto, que la normal del pie saliente es igual a la masa del PASIBOT por la aceleración de la gravedad, y la normal del pie entrante es igual a 0:

$$N_s = M \cdot g = 75,05N$$

$$N_e = 0N$$



Gráfica 10. Normales para la primera etapa del paso.

6.1.2. Fuerza normal en la segunda etapa del paso

La segunda etapa del paso es la que debería estar comprendida entre los ángulos de la manivela motor θ_8 de 1,16rad y 1,98rad. Pero como se vio anteriormente, debido a la transferencia adelantada de masas, ésta etapa comienza en 1,07rad en lugar de 1,16rad. Esta etapa es en la que se encuentra apoyado con los dos pies en el suelo el robot bípodo, produciéndose una transferencia de carga desde el pie saliente al pie entrante como veremos mas adelante.

El esquema de esta etapa es el de la Figura 44, d_s y d_e son la distancia horizontal desde el centro de cada uno de los pies hasta el centro de masas del PASIBOT. Se obtiene d_s mediante la suma de dNs , la distancia al eje X existente en el punto de unión del eslabón tibia y pie saliente, y d_{CM} , distancia al eje X del centro de masas ($d_s = d_{CM} + dNs$). Para obtener d_e , se tendrá que sumar dNe , distancia al eje X de la unión entre tibia y pie entrante y d_{CM} , distancia al eje X del centro de masas ($d_e = dNe + d_{CM}$);

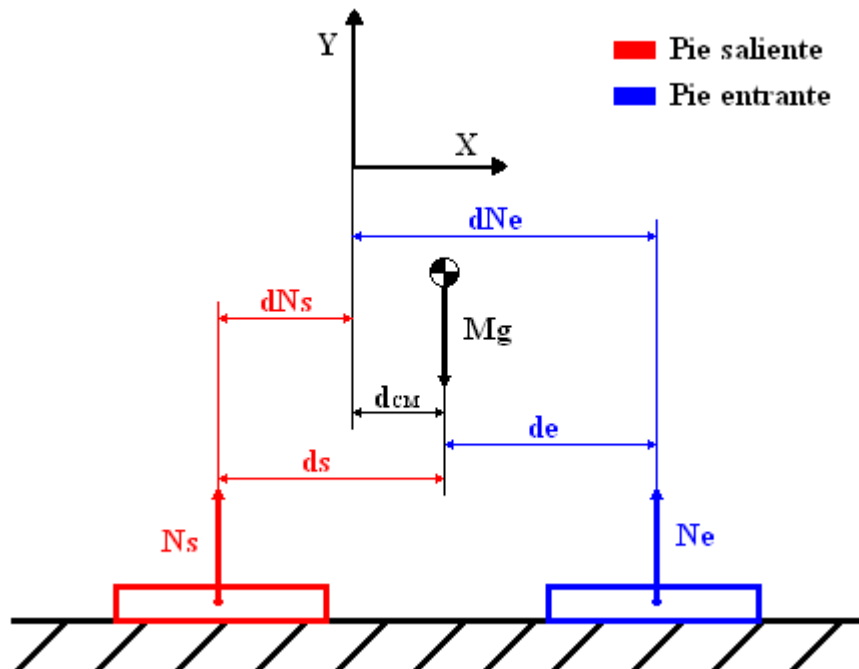


Figura 44. Esquema de fuerzas para la segunda etapa del paso.

Se realiza el sumatorio de fuerzas verticales igual a cero, y sumatorio de momentos respecto el centro de masas igual a cero:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_v &= N_s + N_e - M \cdot g = 0 \\ \sum M_{CM} &= N_s \cdot d_s - N_e \cdot d_e = 0 \end{aligned} \right\} N_e = \frac{M \cdot g \cdot d_s}{d_e + d_s}; N_s = \frac{M \cdot g \cdot d_e}{d_e + d_s}$$

El valor de la aceleración de la gravedad tomado es $9,81\text{m/s}^2$ y el valor de la masa total es de $7,658\text{Kg}$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores para N_s y N_e , se obtienen los siguientes valores de la normal en función del ángulo de la manivela motor para ambos pies apoyados en el suelo:

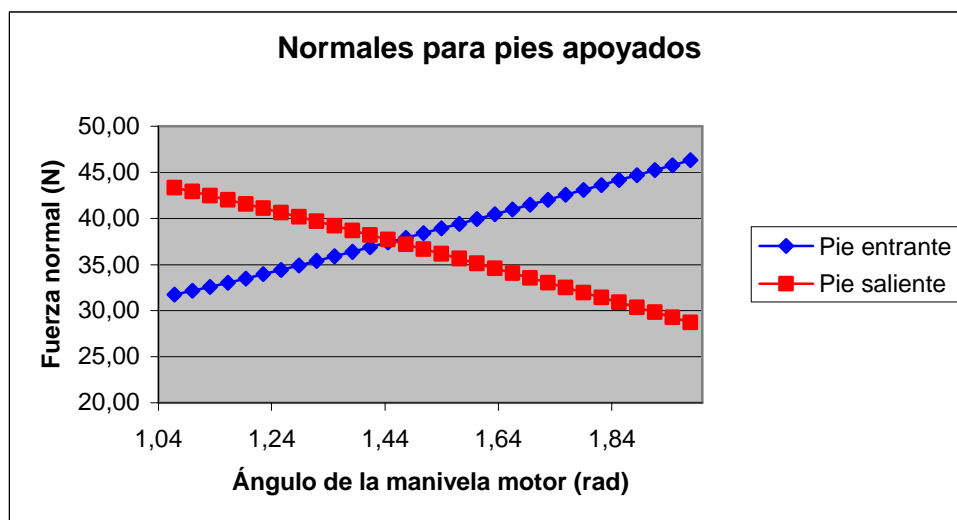
Ángulo motor (rad)	d_{CM} (mm)	d_{Ns} (mm)	d_{Ne} (mm)	d_s (mm)	d_e (mm)	N_s (N)	N_e (N)
1,07	37,37	-57,93	167,45	95,30	130,08	43,32	31,73
1,10	37,06	-60,32	166,94	97,38	129,87	42,89	32,16
1,13	36,76	-62,69	166,29	99,46	129,53	42,45	32,60
1,16	36,47	-65,05	165,52	101,52	129,06	42,01	33,04
1,19	36,17	-67,38	164,64	103,56	128,46	41,55	33,50
1,23	35,89	-69,70	163,64	105,58	127,75	41,09	33,96
1,26	35,61	-71,98	162,54	107,59	126,94	40,62	34,43
1,29	35,33	-74,24	161,34	109,57	126,01	40,14	34,91
1,32	35,06	-76,48	160,05	111,53	125,00	39,66	35,39
1,35	34,79	-78,68	158,68	113,46	123,89	39,17	35,88
1,38	34,52	-80,84	157,22	115,37	122,70	38,68	36,37
1,45	34,01	-85,07	154,08	119,07	120,07	37,68	37,37
1,48	33,75	-87,12	152,40	120,87	118,65	37,18	37,88
1,51	33,51	-89,13	150,66	122,63	117,15	36,67	38,38
1,54	33,26	-91,09	148,86	124,35	115,60	36,16	38,90
1,57	33,02	-93,00	147,00	126,02	113,98	35,64	39,41
1,63	32,57	-96,66	143,13	129,22	110,56	34,61	40,45
1,67	32,35	-98,40	141,12	130,75	108,77	34,08	40,97
1,70	32,14	-100,08	139,07	132,21	106,93	33,56	41,49
1,73	31,93	-101,68	136,98	133,62	105,04	33,03	42,02
1,76	31,74	-103,22	134,84	134,96	103,10	32,50	42,55
1,79	31,56	-104,68	132,68	136,24	101,12	31,97	43,08
1,82	31,39	-106,05	130,48	137,44	99,09	31,44	43,61
1,85	31,23	-107,34	128,24	138,57	97,01	30,91	44,15
1,88	31,09	-108,54	125,98	139,63	94,90	30,37	44,68
1,92	30,96	-109,64	123,70	140,60	92,74	29,83	45,22
1,95	30,85	-110,64	121,38	141,49	90,54	29,29	45,77
1,98	30,76	-111,52	119,05	142,28	88,29	28,74	46,31

Tabla 10. Valores del cálculo de las normales para la segunda etapa del paso.

Con los valores obtenidos, se realiza la Gráfica 11 para poder visualizar de una manera fácil el comportamiento de la fuerza normal en la fase del doble apoyo. Se observa cómo existe una transferencia de carga, desde el pie saliente al entrante. El pie saliente comienza siendo el que posee más carga con 42,01N para disminuir hasta los 28,74N y a la vez vemos cómo la normal del pie entrante aumenta desde los 33,04N hasta los 46,31N cruzándose ambas funciones cuando el ángulo de la manivela motor es de 1,43rad.

En un primer momento se podría pensar que las funciones tanto de pie saliente y pie entrante deberían comenzar en 75N y 0N respectivamente, donde acaban en la fase anterior, pero esto no sucede debido a lo que se pudo ver en el apartado 5.1 al existir una transferencia adelantada de masas que hace que exista una discontinuidad en las funciones al desplazarse el centro de masas fuera del pie saliente antes de comenzar la etapa del doble apoyo.

Un fenómeno similar ocurre al finalizar la etapa de doble apoyo, en donde el pie saliente y entrante deberían acabar en 0N y 75N respectivamente para que existiera una continuidad entre las funciones. En este caso ocurre que el pie saliente no se ha descargado completamente de todo su peso, cuando ha comenzado la tercera etapa del paso y por tanto el centro de masas del PASIBOT pasa a estar completamente sostenido por el único pie apoyado, el entrante.



Gráfica 11. Normales para pies apoyados en el suelo.

6.1.3. Fuerza normal en la tercera etapa del paso

La tercera etapa del paso, se encuentra limitada por los ángulos del eslabón de la manivela motor θ_8 desde 1,98rad hasta 3,14rad. El PASIBOT se encuentra con el pie entrante únicamente apoyado en el suelo, por lo que este será el que aguante todo el peso del robot. El esquema de fuerzas al que esta solicitado el pie lo vemos en la siguiente Figura 45

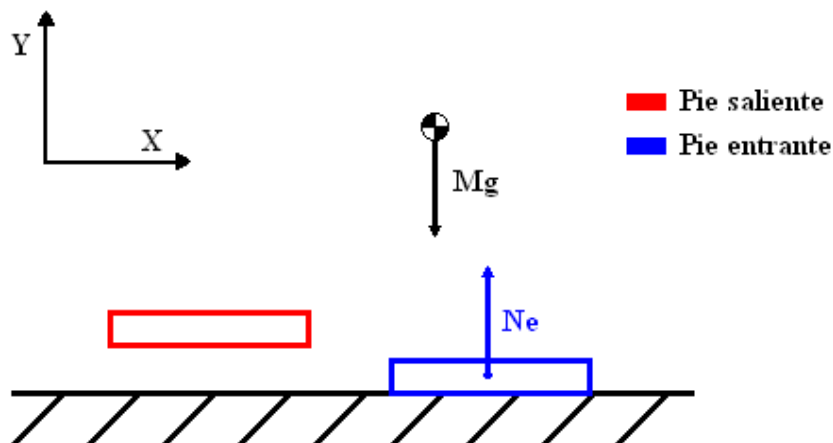
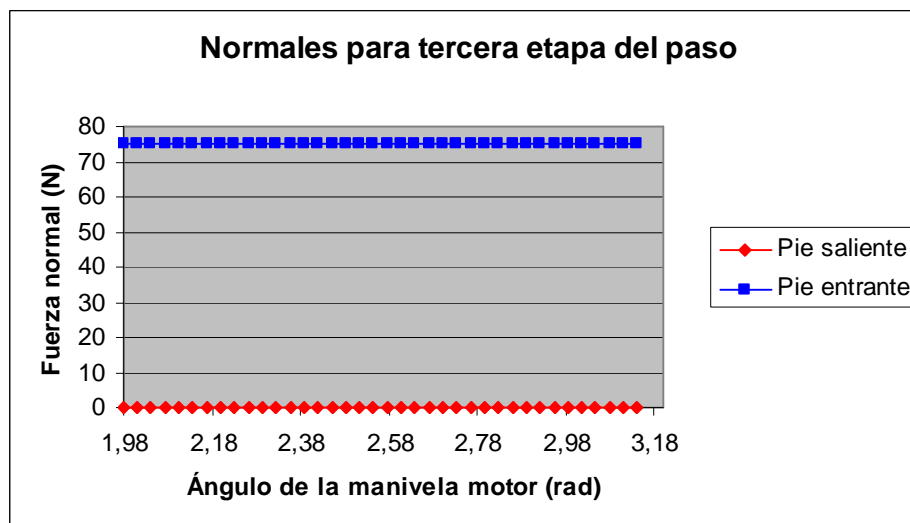


Figura 45. Esquema de fuerzas para la tercera etapa del paso.

Se tiene por tanto, que la normal del pie entrante es igual a la masa del PASIBOT por la gravedad, y la normal del pie saliente es igual a 0:

$$N_s = 0N$$

$$N_e = M \cdot g = 75,05N$$



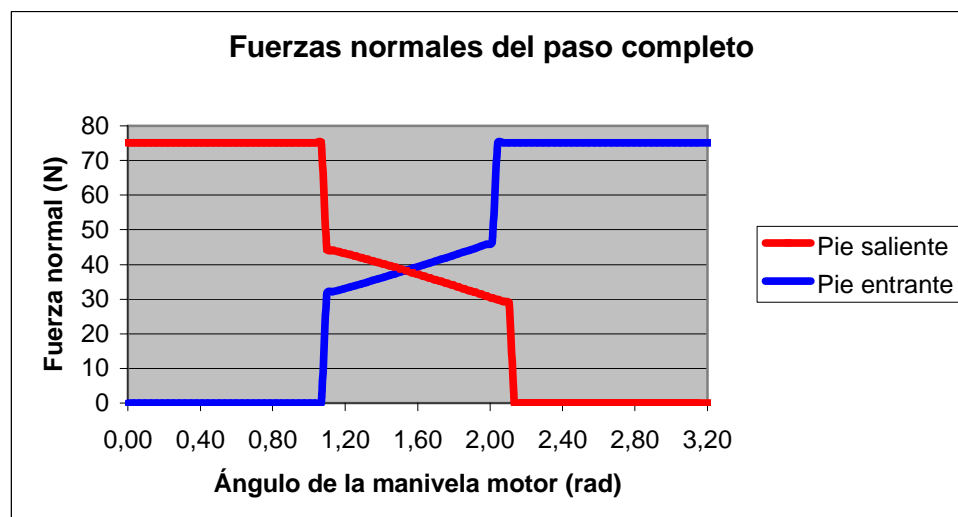
Gráfica 12. Normales para la tercera etapa del paso.

6.1.4. Paso completo

Para ver mejor el comportamiento general a lo largo de un paso de las fuerzas normales se realiza la siguiente Gráfica 13, englobando las tres etapas anteriormente estudiadas.

El final de la primera etapa y el comienzo de la segunda están claramente diferenciadas, debido a que se produce un salto en las normales y una discontinuidad en las funciones como consecuencia del desplazamiento hacia delante del centro de masas, en lo que se definió como transferencia adelantada de masas. La segunda etapa, con ambos pies apoyados en el suelo, comienza antes debido a esta transferencia de masas, en las que las normales son compartidas por los dos pies en esta etapa intermedia.

De igual forma el final de la segunda etapa, con el comienzo de la tercera, se diferencian fácilmente, existiendo de nuevo otra discontinuidad en las funciones, ya que el pie saliente no ha acabado de descargarse del todo cuando el centro de masas a pasado a estar situado completamente sobre el pie entrante, soportante este en ese momento todo el peso del PASIBOT.



Gráfica 13. Fuerzas normales a lo largo de un paso completo.

6.2. Fuerza de rozamiento

Cuando dos superficies son puestas en contacto, el movimiento de una respecto a la otra genera fuerzas tangenciales llamadas fuerzas de fricción, las cuales tienen sentido contrario a la fuerza aplicada. La naturaleza de este tipo de fuerza está ligada a las interacciones de las partículas microscópicas de las dos superficies rugosas implicadas.

Así, la fuerza de rozamiento o fuerza de fricción entre dos superficies de contacto, es aquella fuerza que se opone al deslizamiento de una superficie sobre otra (fuerza de rozamiento dinámica) o al inicio del deslizamiento (fuerza de fricción estática).

En la Figura 46 se tiene el cono de deslizamiento: Dibujamos un cono cuyo vértice es el punto de aplicación de la fuerza, cuyo eje es la normal al plano de contacto y su abertura es ϕ . Si la fuerza R que ejerce el plano de contacto sobre el cuerpo, cae dentro del cono o en el lugar geométrico del límite al deslizamiento (como vemos en la imagen) existirá equilibrio y por tanto no se iniciará el movimiento. En cambio, si R sale fuera del cono, el rozamiento no es suficiente para el equilibrio y se producirá un deslizamiento [12].

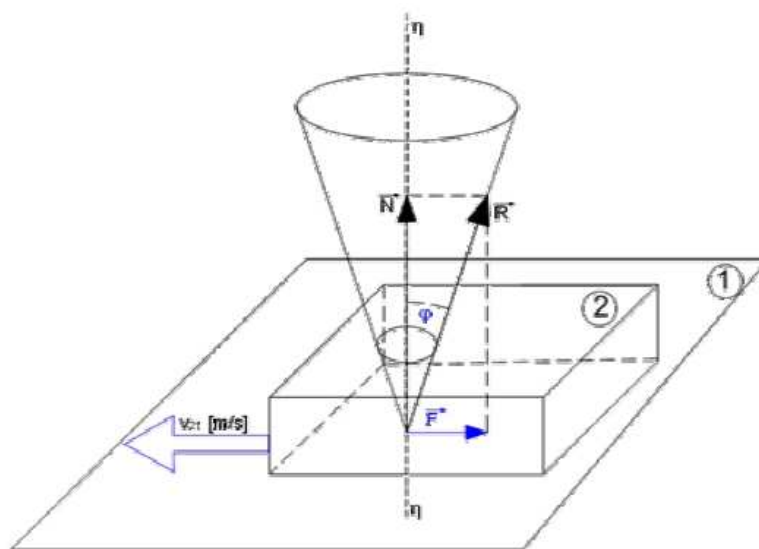


Figura 46. Cono de deslizamiento o rozamiento.



La fuerza máxima de rozamiento que puede ejercer una superficie sobre la otra en un plano horizontal se expresa como el producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal (perpendicular) a ambas superficies:

$$F_R = \mu \cdot N$$

Las características que presenta la fuerza de rozamiento seco, según la teoría de Coulomb, son:

1. Depende de los esfuerzos normales.
2. Bastante estable con la velocidad relativa.
3. Independiente del área existente entre las superficies de contacto.
4. Depende del estado y naturaleza de las superficies en contacto.

Debido a esta última propiedad, el valor del coeficiente de rozamiento es característico de cada par de materiales en contacto; no es una propiedad intrínseca de un material. Depende además de muchos factores como la temperatura, el acabado de las superficies, la velocidad relativa entre las superficies, etc [12].

Los valores del coeficiente de rozamiento se obtienen de manera experimental y son magnitudes adimensionales. Si se sitúa un objeto en reposo sobre un plano, y se le va otorgando una inclinación a dicho plano, el valor crítico en el que el sólido comienza a deslizar es cuando la fuerza de rozamiento ha alcanzado el valor máximo, pudiéndose obtener el coeficiente de rozamiento estático como la tangente del ángulo formado por el plano y la horizontal:

$$\tan \theta = \mu_{estático}$$

En este capítulo se obtendrán diferentes valores de la fuerza de rozamiento estática mediante la combinación de materiales con distintos coeficientes para el suelo y los pies del PASIBOT.

En la Tabla 11 vemos los distintos coeficientes de rozamientos con los que se va a trabajar debido a que las suelas de los pies pueden ser recubiertas con distintos materiales y la superficie de apoyo puede ser a su vez de diversos materiales. Estos coeficientes representan valores típicos solo en condiciones ordinarias de trabajo. Los verdaderos coeficientes correspondientes a una situación dada, dependerán de la naturaleza de las superficies en contacto como dijimos anteriormente. Puede esperarse una variación del 25% o más, respecto a estos valores en las aplicaciones prácticas según sean las condiciones de trabajo:

Combinación de materiales	Coeficiente de rozamiento estático μ [13], [14]
Aluminio - aluminio	1,05
Neumático - pavimento	0,9
Aluminio - acero blando	0,61
Cuero - acero blando	0,6
Cuero - metal	0,4
Cuero - madera	0,3
Madera - madera	0,25
Polietileno - acero	0,2
Teflón - acero	0,04

Tabla 11. Coeficientes de rozamiento estático para distinta combinación de materiales.

6.2.1. Resultados obtenidos

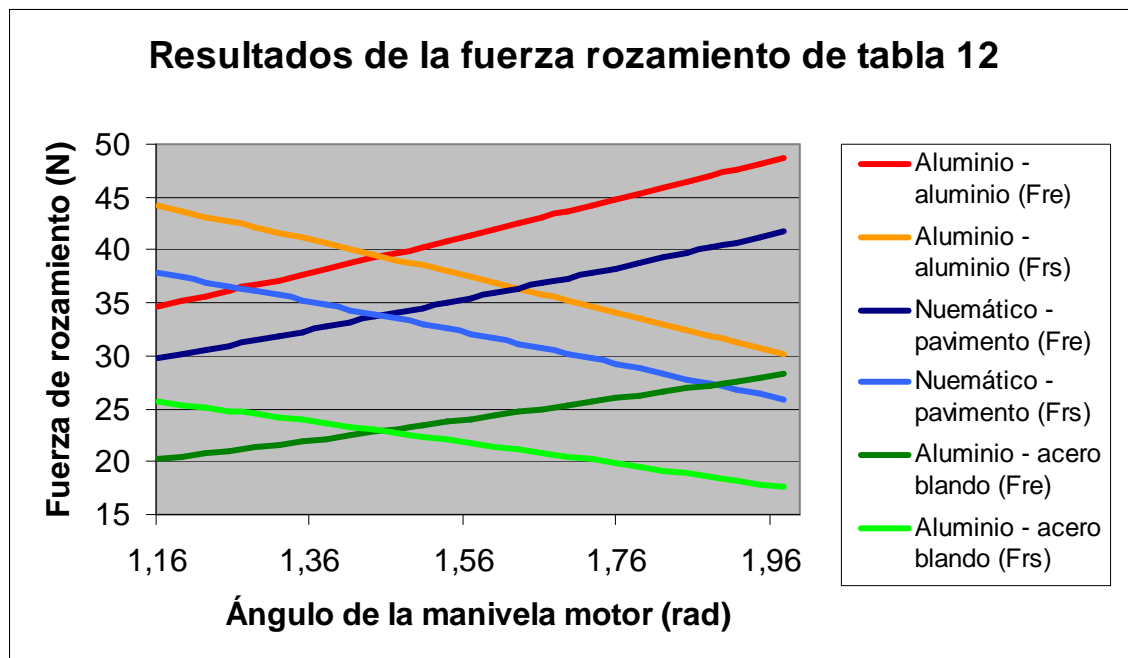
Con los valores de las normales entre el suelo y los pies, variables durante la fase de doble apoyo, se han obtenido las fuerzas de rozamiento correspondientes.

En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos con los tres primeros coeficientes de rozamiento estático de la Tabla 11 que hemos elegido para el estudio. Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante, y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente para cada ángulo de la manivela motor en la segunda etapa del paso, para ambos pies apoyados en el suelo.

Manivela motor θ_8 (rad)	Aluminio – aluminio		Neumático - pavimento		Aluminio – acero blando	
	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)
1,16	34,70	44,11	29,74	37,81	20,16	25,63
1,19	35,17	43,63	30,15	37,40	20,43	25,35
1,23	35,66	43,15	30,56	36,98	20,72	25,07
1,26	36,15	42,65	30,99	36,56	21,00	24,78
1,29	36,65	42,15	31,42	36,13	21,29	24,49
1,32	37,16	41,65	31,85	35,70	21,59	24,19
1,35	37,67	41,13	32,29	35,26	21,89	23,90
1,38	38,19	40,62	32,73	34,81	22,19	23,60
1,41	38,71	40,09	33,18	34,37	22,49	23,29
1,45	39,24	39,57	33,63	33,91	22,80	22,99
1,48	39,77	39,04	34,09	33,46	23,10	22,68
1,51	40,30	38,50	34,55	33,00	23,41	22,37
1,54	40,84	37,96	35,01	32,54	23,73	22,06
1,57	41,38	37,42	35,47	32,08	24,04	21,74
1,60	41,92	36,88	35,93	31,61	24,36	21,43
1,63	42,47	36,34	36,40	31,14	24,67	21,11
1,67	43,02	35,79	36,87	30,68	24,99	20,79
1,70	43,57	35,24	37,34	30,20	25,31	20,47
1,73	44,12	34,68	37,82	29,73	25,63	20,15
1,76	44,67	34,13	38,29	29,25	25,95	19,83
1,79	45,23	33,57	38,77	28,78	26,28	19,50
1,82	45,79	33,01	39,25	28,30	26,60	19,18
1,85	46,35	32,45	39,73	27,82	26,93	18,85
1,88	46,92	31,89	40,22	27,33	27,26	18,52
1,92	47,48	31,32	40,70	26,85	27,59	18,20
1,95	48,05	30,75	41,19	26,36	27,92	17,86
1,98	48,63	30,18	41,68	25,87	28,25	17,53

Tabla 12. Tabla de resultados 1 de las fuerzas de rozamiento para ambos pies.

Con los datos obtenidos anteriormente de la Tabla 12, se dibuja la siguiente gráfica de la fuerza de rozamiento con las siguientes tres combinaciones de superficies: aluminio – aluminio (tonos rojizos), neumático – pavimento (tonos azules) y aluminio – acero blando (tonos verdes). En la leyenda de la gráfica Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente, siendo dos pares de fuerza para cada situación de superficies de ambos pies apoyados en el suelo.



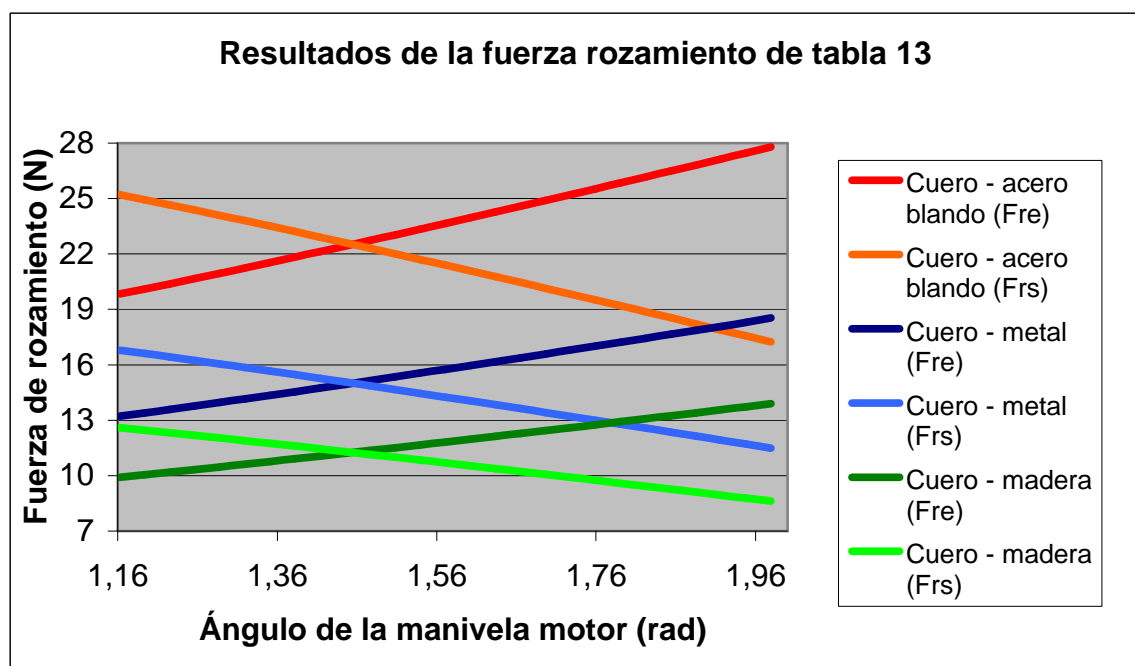
Gráfica 14. Resultados de la fuerza de rozamiento obtenidos de la Tabla 12.

La tabla siguiente muestra los resultados que se han obtenido con los siguientes tres coeficientes de rozamiento estático de la Tabla 11, elegidos para el estudio. Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante, y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente para cada ángulo de la manivela motor en la segunda etapa del paso para ambos pies apoyados en el suelo.

Manivela motor θ_8 (rad)	Cuero – acero blando		Cuero – metal		Cuero – madera	
	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)
1,16	19,83	25,21	13,22	16,80	9,91	12,60
1,19	20,10	24,93	13,40	16,62	10,05	12,47
1,23	20,38	24,65	13,58	16,44	10,19	12,33
1,26	20,66	24,37	13,77	16,25	10,33	12,19
1,29	20,94	24,09	13,96	16,06	10,47	12,04
1,32	21,23	23,80	14,16	15,86	10,62	11,90
1,35	21,53	23,50	14,35	15,67	10,76	11,75
1,38	21,82	23,21	14,55	15,47	10,91	11,60
1,41	22,12	22,91	14,75	15,27	11,06	11,46
1,45	22,42	22,61	14,95	15,07	11,21	11,30
1,48	22,73	22,31	15,15	14,87	11,36	11,15
1,51	23,03	22,00	15,35	14,67	11,52	11,00
1,54	23,34	21,69	15,56	14,46	11,67	10,85
1,57	23,65	21,39	15,76	14,26	11,82	10,69
1,60	23,96	21,08	15,97	14,05	11,98	10,54
1,63	24,27	20,76	16,18	13,84	12,13	10,38
1,67	24,58	20,45	16,39	13,63	12,29	10,23
1,70	24,90	20,14	16,60	13,42	12,45	10,07
1,73	25,21	19,82	16,81	13,21	12,61	9,91
1,76	25,53	19,50	17,02	13,00	12,76	9,75
1,79	25,85	19,18	17,23	12,79	12,92	9,59
1,82	26,17	18,86	17,44	12,58	13,08	9,43
1,85	26,49	18,54	17,66	12,36	13,24	9,27
1,88	26,81	18,22	17,87	12,15	13,41	9,11
1,92	27,13	17,90	18,09	11,93	13,57	8,95
1,95	27,46	17,57	18,31	11,71	13,73	8,79
1,98	27,79	17,24	18,53	11,50	13,89	8,62

Tabla 13. Tabla de resultados 2 de las fuerzas de rozamiento para ambos pies.

Con los datos obtenidos anteriormente de la Tabla 13, se dibuja la siguiente gráfica de la fuerza de rozamiento con las siguientes tres combinaciones de superficies: cuero – acero blando (tonos rojizos), cuero – metal (tonos azules) y cuero – madera (tonos verdes). En la leyenda de la gráfica Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente, siendo dos pares de fuerza para cada situación de superficies de ambos pies apoyados en el suelo.



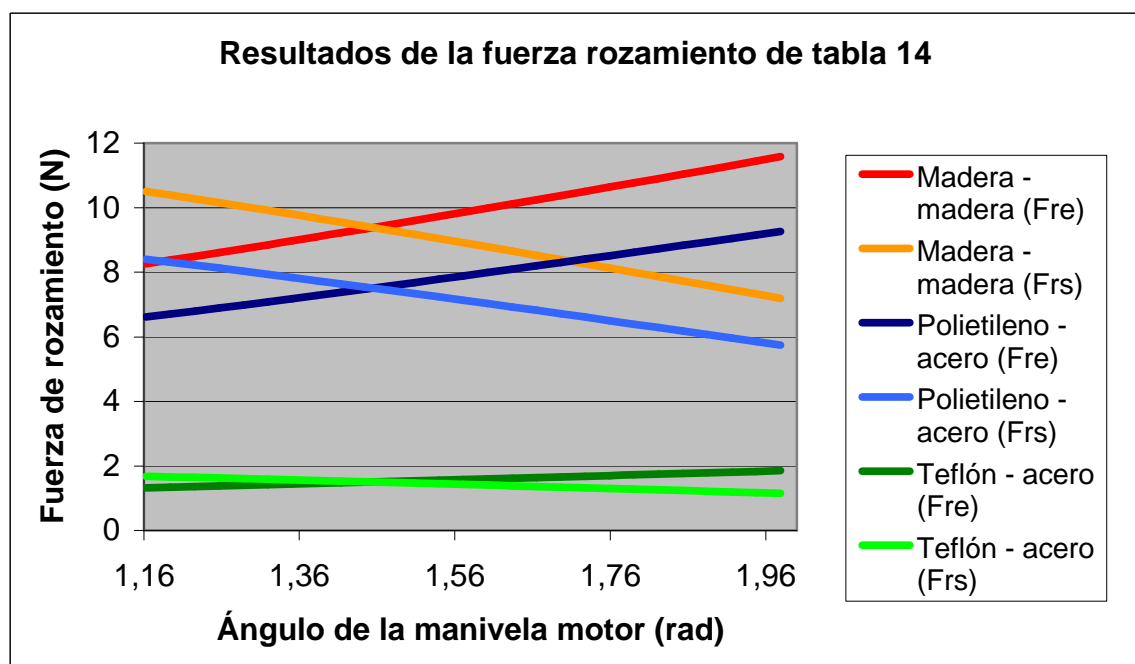
Gráfica 15. Resultados de la fuerza de rozamiento obtenidos de la Tabla 13.

En esta tercera tabla se muestran los resultados que se han obtenido con los tres últimos coeficientes de rozamiento estático de la Tabla 11, elegidos para el estudio. Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante, y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente para cada ángulo de la manivela motor en la segunda etapa del paso para ambos pies apoyados en el suelo.

Manivela motor θ_8 (rad)	Madera - madera		Polietileno - acero		Teflón - acero	
	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)	Fr_e (N)	Fr_s (N)
1,16	8,26	10,50	6,61	8,40	1,32	1,68
1,19	8,37	10,39	6,70	8,31	1,34	1,66
1,23	8,49	10,27	6,79	8,22	1,36	1,64
1,26	8,61	10,16	6,89	8,12	1,38	1,62
1,29	8,73	10,04	6,98	8,03	1,40	1,61
1,32	8,85	9,92	7,08	7,93	1,42	1,59
1,35	8,97	9,79	7,18	7,83	1,44	1,57
1,38	9,09	9,67	7,27	7,74	1,45	1,55
1,41	9,22	9,55	7,37	7,64	1,47	1,53
1,45	9,34	9,42	7,47	7,54	1,49	1,51
1,48	9,47	9,29	7,58	7,44	1,52	1,49
1,51	9,60	9,17	7,68	7,33	1,54	1,47
1,54	9,72	9,04	7,78	7,23	1,56	1,45
1,57	9,85	8,91	7,88	7,13	1,58	1,43
1,60	9,98	8,78	7,99	7,03	1,60	1,41
1,63	10,11	8,65	8,09	6,92	1,62	1,38
1,67	10,24	8,52	8,19	6,82	1,64	1,36
1,70	10,37	8,39	8,30	6,71	1,66	1,34
1,73	10,50	8,26	8,40	6,61	1,68	1,32
1,76	10,64	8,13	8,51	6,50	1,70	1,30
1,79	10,77	7,99	8,62	6,39	1,72	1,28
1,82	10,90	7,86	8,72	6,29	1,74	1,26
1,85	11,04	7,73	8,83	6,18	1,77	1,24
1,88	11,17	7,59	8,94	6,07	1,79	1,21
1,92	11,31	7,46	9,04	5,97	1,81	1,19
1,95	11,44	7,32	9,15	5,86	1,83	1,17
1,98	11,58	7,18	9,26	5,75	1,85	1,15

Tabla 14. Tabla de resultados 3 de las fuerzas de rozamiento para ambos pies.

Utilizando los datos obtenidos anteriormente de la Tabla 14, se dibuja la siguiente gráfica de la fuerza de rozamiento con las siguientes tres combinaciones de superficies: madera - madera (tonos rojizos), polietileno - acero (tonos azules) y teflón - acero (tonos verdes). En la leyenda de la gráfica Fr_e hace referencia a la fuerza de rozamiento del pie entrante y Fr_s es la fuerza de rozamiento del pie saliente, siendo dos pares de fuerza para cada situación de superficies de ambos pies apoyados en el suelo.



Gráfica 16. Resultados de la fuerza de rozamiento obtenidos de la Tabla 14.

6.3. Fuerza tangencial

En este capítulo se explicará como se debe de obtener la fuerza tangencial ejercida entre el pie del robot y el suelo, para su comparación con la fuerza de rozamiento estática. Se expondrá el desarrollo matemático y las ecuaciones que hay que seguir para obtener los resultados de la fuerza tangencial, sin embargo, no se obtendrán resultados numéricos debido a la complejidad del sistema de ecuaciones. Para obtener soluciones numéricas se tendría que añadir las siguientes ecuaciones que expondremos a un sistema de 73 ecuaciones, con 73 incógnitas que se resolvió en un proyecto anterior, para un pie únicamente apoyado, mediante un programa en MATLAB [15].

Para obtener la fuerza tangencial de cada pie, se planteará el sumatorio de fuerzas horizontales y verticales en cada pie, además de suma de momentos respecto al centro de masas de cada pie. Se tomará como signos positivos, el eje horizontal hacia la derecha, el eje vertical hacia arriba, y el sentido de giro positivo antihorario.

En la Figura 47 se tiene el esquema de fuerzas que se utilizará para resolver el problema:

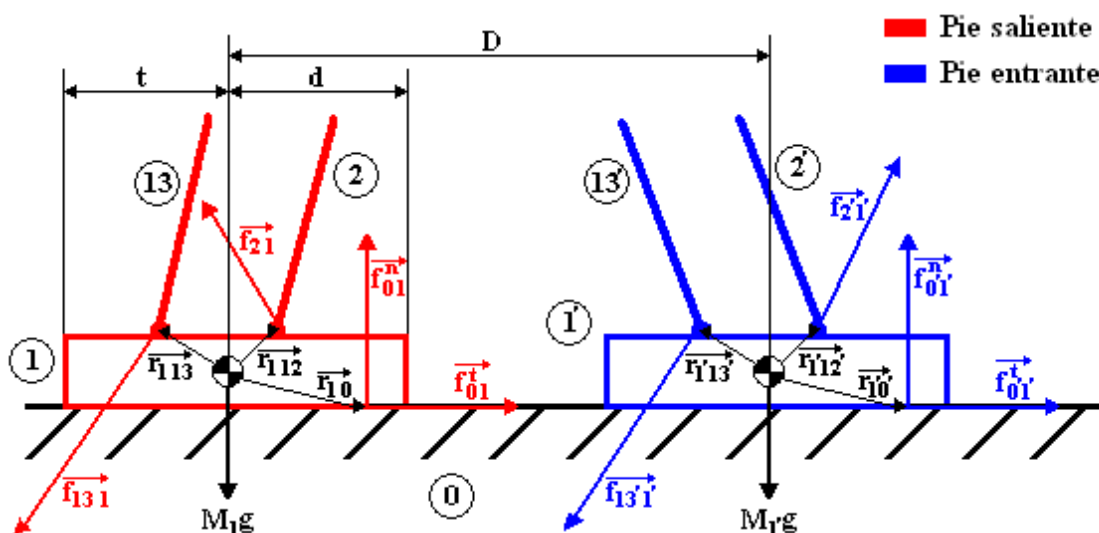


Figura 47. Esquema de fuerzas para la obtención de la fuerza tangencial en cada pie.

Las tres ecuaciones por cada pie, sumatorio de fuerzas horizontales y verticales y una de momentos son las siguientes:

Pie entrante:

$$\begin{cases} f_{0,1}^t - f_{1,2x} - f_{1,13x} = m_1 \cdot a_{1x} \\ f_{0,1}^n - f_{1,2y} - f_{1,13y} - m_1 \cdot g = 0 \\ r_{1,0x} \cdot f_{0,1}^n - r_{1,0y} \cdot f_{0,1}^t - r_{1,2x} \cdot f_{1,2y} + r_{1,2y} \cdot f_{1,2x} - r_{1,13x} \cdot f_{1,13y} + r_{1,13y} \cdot f_{1,13x} = 0 \end{cases}$$

Pie saliente:

$$\begin{cases} f_{0,1'}^t + f_{1',2'x} - f_{1',13'x} = m_{1'} \cdot a_{1'x} \\ f_{0,1'}^n + f_{1',2'y} - f_{1',13'y} - m_{1'} \cdot g = 0 \\ r_{1',0x} \cdot f_{0,1'}^n - r_{1',0y} \cdot f_{0,1'}^t - r_{1',2'x} \cdot f_{1',2'y} + r_{1',2'y} \cdot f_{1',2'x} - r_{1',13'x} \cdot f_{1',13'y} + r_{1',13'y} \cdot f_{1',13'x} = 0 \end{cases}$$

Los momentos se igualan a cero, debido a que no existe una aceleración angular y solamente cabe contemplar un posible desplazamiento del horizontalmente con aceleración x .

La masa m_1 y $m_{1'}$ son iguales en cada pie y de valor conocido.

Por lo tanto, con estas 6 ecuaciones adicionales añadidas al mencionado sistema de 73 ecuaciones, se podrían obtener las incógnitas $f_{0,1}^t$, $f_{0,1'}^t$, $f_{0,1}^n$, $f_{0,1'}^n$, a_{1x} y $a_{1'x}$

En realidad, las terceras ecuaciones sólo son necesarias para determinar $r_{1,0x}$ y $r_{1',0x}$, es decir, ubicar el punto de aplicación de la normal, también llamado "Zero Momento Point" (ZMP). Este punto es importante en el estudio dinámico del vuelco longitudinal del robot, que suponemos que no tendrá lugar en la fase de doble apoyo.

7. DESLIZAMIENTO DEL BÍPEDO

En este último apartado se estudiará el deslizamiento relativo existente entre ambos pies cuando se encuentra en la segunda etapa del paso, con los dos pies apoyados en el suelo, como definimos anteriormente con los datos de la cinemática que hemos ido obteniendo a lo largo de este proyecto.

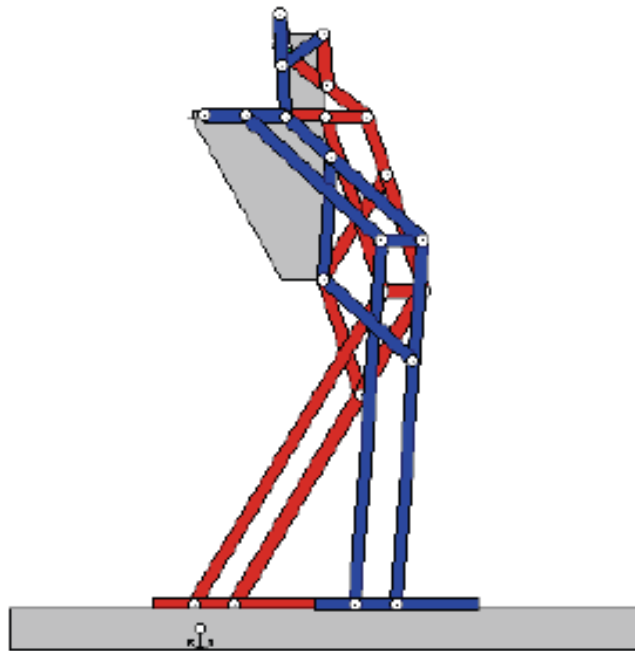


Figura 48. El PASIBOT en la segunda etapa del paso con ambos pies apoyados.

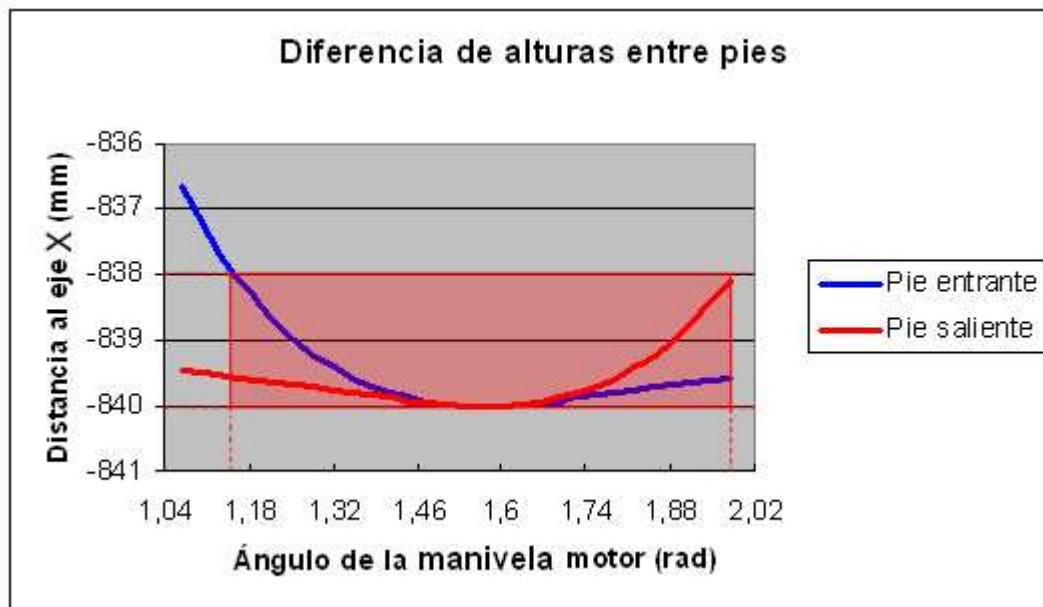
En esta etapa del doble apoyo se pueden dar 3 diferentes tipos de deslizamiento relativo entre los pies y el suelo que pasamos a definir ahora:

1. El pie saliente se encuentra fijo respecto al suelo, y el pie entrante se desliza sobre el suelo.
2. El pie saliente desliza respecto al suelo y el pie entrante se encuentra fijo sobre el firme.
3. Ambos pies deslizan a la vez sobre el suelo.

Se estudiará en este capítulo qué tipo de deslizamiento se da entre pies y suelo, pudiendo darse solamente un caso de deslizamiento de los tres descritos anteriormente o tener lugar varios casos consecutivamente, a lo largo de la etapa de doble apoyo.

Recordamos que la etapa de doble apoyo se daba en el intervalo comprendido entre 1,16rad y 1,98rad, ángulos de la manivela motor θ_8 que forman respecto a la horizontal. Como criterio para determinar el rango de altura respecto al eje X en el que se consideran apoyados ambos pies sobre el suelo, se propuso el intervalo de 2mm comprendido entre -838mm y -840mm de distancia al eje X. Además, según se comprobó en el apartado 5.1, existe una transferencia adelantada de masas que hace que el bípodo vuelque hacia delante cuando la manivela motor posee un ángulo de 1,07rad.

En la siguiente Gráfica 17 se representa dicho intervalo para ambos pies apoyados y la diferencia de alturas existente respecto a nuestro eje X.





7.1. Método de resolución

Para el estudio del deslizamiento en la condición de doble apoyo, se expondrá en este apartado el método de resolución para los tres posibles casos de deslizamiento relativo entre pies y suelo que se puedan dar.

Debido a que no se tienen resultados numéricos de la fuerza tangencial entre pies y suelo, se explicará las condiciones que hay que añadir para resolver que tipo de deslizamiento existe en cada instante para poder ser implementado en el código del programa.

Primeramente se expondrán las condiciones que se dan en cada uno de los tres casos de deslizamiento posibles ((A) el pie saliente se encuentra fijo respecto al suelo, y el pie entrante se desliza sobre el suelo; (B) el pie saliente desliza respecto al suelo y el pie entrante se encuentra fijo y (C) ambos pies deslizan a la vez sobre el suelo).

Finalmente se expondrá el diagrama de flujo a seguir para obtener la resolución en cada instante.

7.1.1. Primera hipótesis de deslizamiento

La primera hipótesis de deslizamiento relativo es aquella en la que el pie saliente no desliza (con aceleración nula) sobre el suelo, y el pie entrante desliza con una cierta aceleración conocida de componente x, puesto que se conoce la cinemática del movimiento relativo entre los pies.

Las condiciones que se deben de dar para este caso son:

$$\begin{cases} a_{1x} = 0 \\ a_{1'x} (\text{conocida}) \\ f_{01}^t \leq \mu_e \cdot f_{01}^n \\ f_{01'}^t = \mu_d \cdot f_{01'}^n \end{cases}$$

La aceleración a_{1x} debe ser cero para que el pie saliente se mantenga fijo sobre el suelo. Además, la fuerza tangencial, $f_{0,1}^t$, debe ser de módulo igual q menor que la máxima fuerza de rozamiento estática (la normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento estático). La aceleración en el pie entrante $a_{1'x}$ es de valor conocido, y se obtendrá de las ecuaciones cinemáticas. En este caso, el pie entrante desliza, por lo que $f_{0,1'}^t$ es igual a la fuerza de rozamiento dinámica (la normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento dinámico).

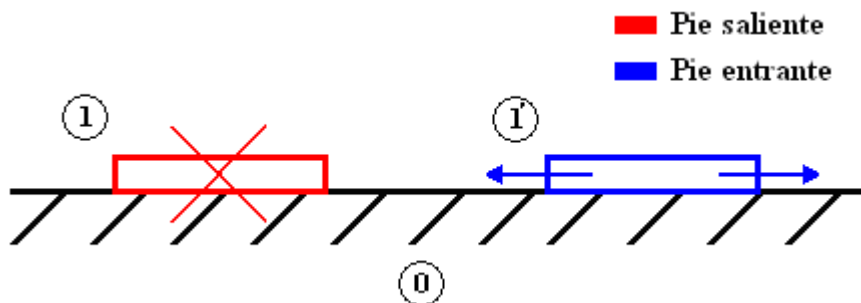


Figura 49. Primera hipótesis de deslizamiento. El pie saliente se mantiene fijo y el pie entrante desliza sobre el suelo.

7.1.2. Segunda hipótesis de deslizamiento

La segunda hipótesis de deslizamiento relativo es aquella en la que el pie saliente desliza con una cierta aceleración conocida de componente x , y el pie entrante se mantiene fijo y con aceleración nula sobre el suelo.

Las condiciones que se deben de dar para este caso son:

$$\begin{cases} a_{1x}(\text{conocida}) \\ a_{1'x} = 0 \\ f_{01}^t = \mu_d \cdot f_{01}^n \\ f_{01'}^t \leq \mu_e \cdot f_{01'}^n \end{cases}$$

La aceleración en el pie saliente a_{1x} es de valor conocido, y se obtendrá de las ecuaciones anteriormente mencionadas. En este caso, el pie saliente desliza, por lo que $f_{0,1}^t$ es igual a la fuerza de rozamiento dinámica. La aceleración $a_{1'x}$ debe ser cero para que el pie entrante se mantenga fijo sobre el suelo, y por tanto, la fuerza tangencial, $f_{0,1'}^t$, será igual o menor que la máxima fuerza de rozamiento estática.

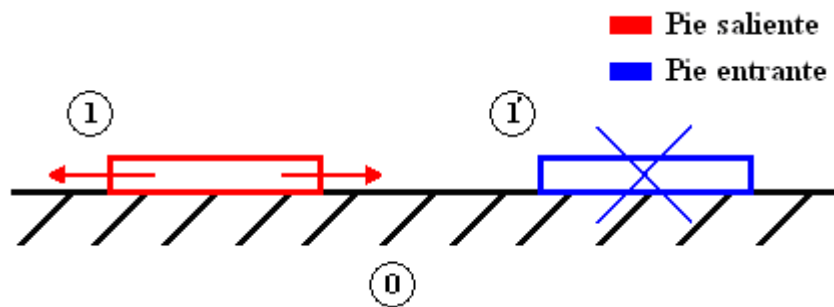


Figura 50. Segunda hipótesis de deslizamiento. El pie saliente desliza y el pie entrante se mantiene fijo al suelo.

7.1.3. Tercera hipótesis de deslizamiento

La tercera hipótesis de deslizamiento relativo es aquella en la que tanto como el pie saliente, como el pie entrante deslizan a la vez sobre el suelo con aceleraciones sobre el eje horizontal x diferentes.

Las condiciones que se deben de dar para este caso son:

$$\begin{cases} a_{1x} - a_{1'x} (\text{conocido}) \\ f_{01}^t = \mu_d \cdot f_{01}^n \\ f_{01'}^t = \mu_d \cdot f_{01'}^n \end{cases}$$

La diferencia entre la aceleración del pie saliente a_{1x} y la aceleración del pie entrante $a_{1'x}$ es conocida, siendo la aceleración a la que se juntan o se separan ambos pies mientras deslizan a la vez sobre el suelo. La fuerza tangencial sobre el pie saliente, $f_{0,1}^t$, y la fuerza tangencial sobre el pie entrante, $f_{0,1'}^t$, serán el producto del coeficiente de rozamiento dinámico por la fuerza normal correspondiente existente en ese momento en cada pie.

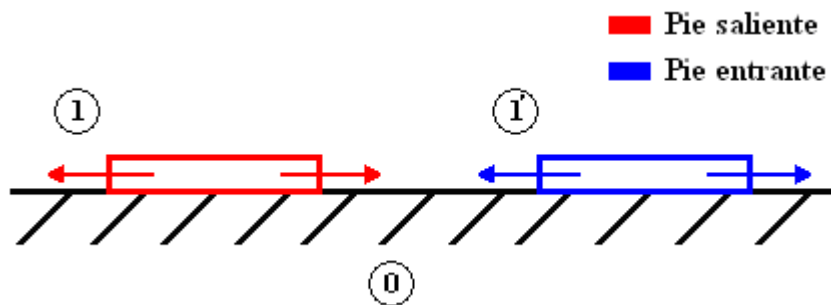


Figura 51. Tercera hipótesis de deslizamiento. Ambos pies deslizan sobre el suelo.

7.1.4. Diagrama de Flujo

El diagrama de flujo a seguir para resolver las ecuaciones de la condición de doble apoyo y obtener en que momento se produce algún tipo de deslizamiento de los tres casos expuestos anteriormente se puede ver en la siguiente figura:

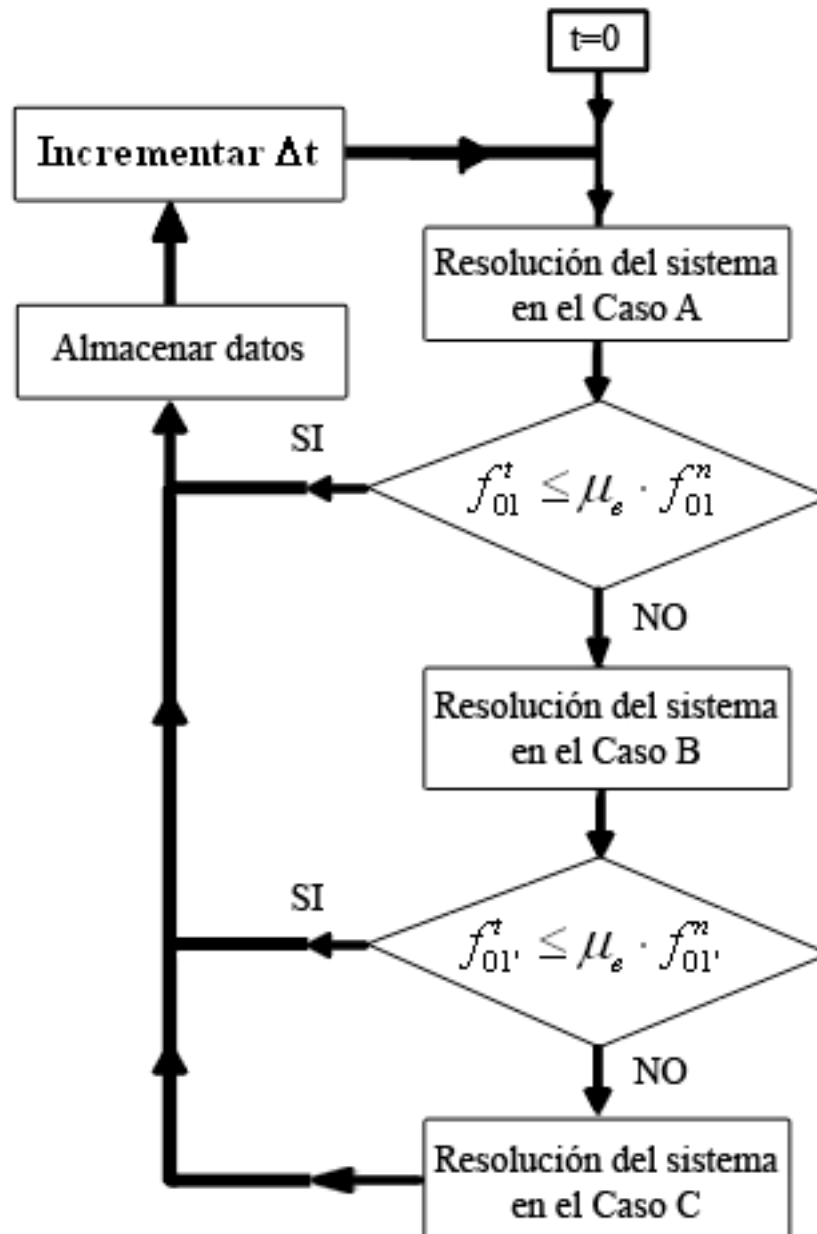


Figura 52. Diagrama de flujo para la resolución de la cinemática del PASIBOT.

El estado A del diagrama simboliza la primera hipótesis de deslizamiento, en el que el pie saliente se mantiene fijo sobre el suelo y el entrante desliza. Previsiblemente, esta hipótesis será la que opere en los primeros instantes de la fase de doble apoyo, ya que el robot apenas está empezando a transferir carga sobre el pie entrante recién posado. Este caso se dará mientras la fuerza tangencial en el pie saliente sea menor que la fuerza de rozamiento estática; es decir, mientras se cumpla la siguiente desigualdad: $f_{01}^t \leq \mu_e \cdot f_{01}^n$ (esta desigualdad se evalúa tras resolver el sistema de ecuaciones dinámico completo). Si se cumple esta condición, el programa finaliza la sentencia comparativa, almacena los resultados y procede a calcular el siguiente instante de tiempo. Si por el contrario no se cumple la desigualdad el programa pasa al siguiente estado B.

El estado B del diagrama simboliza la segunda hipótesis de deslizamiento, en que el pie saliente desliza sobre el suelo y el pie entrante se mantiene fijo. Este caso tendrá lugar previsiblemente en los últimos instantes de la fase de doble apoyo, debido a que el robot está finalizando la transferencia de carga desde el pie saliente, al pie entrante. Para saber si se cumple este segundo caso, tras la resolución del correspondiente sistema de ecuaciones dinámico, se realiza la siguiente comparación entre la fuerza tangencial del pie entrante y la fuerza de rozamiento estática:

$f_{01'}^t \leq \mu_e \cdot f_{01'}^n$. Si se verifica la inecuación se da la segunda hipótesis de cálculo y el programa finaliza la sentencia, almacena los resultados y procediendo a calcular el siguiente instante de tiempo. Si por el contrario, la fuerza tangencial del pie entrante es mayor a la fuerza de rozamiento, ya sólo puede tener lugar el tercer estado C.

El tercer estado C, representa la tercera hipótesis de cálculo, en el que ambos pies deslizan sobre el suelo. Al existir un desplazamiento relativo entre los pies en la etapa de doble apoyo, y al llegar a la conclusión de que tanto el pie saliente, como el pie entrante tienen valores de fuerza tangencial mayores a la fuerza de rozamiento estático, se confirma que para este instante se produce deslizamiento para ambos pies. Se resuelve el correspondiente sistema de ecuaciones dinámico, para después almacenar el programa los datos obtenidos y pasar a calcular el siguiente instante de tiempo.



8. CONCLUSIONES

Tras la realización de este Proyecto de Fin de Carrera, se han podido lograr con éxito los objetivos iniciales marcados en los que destacamos:

- La resolución de las ecuaciones cinemáticas de todos los eslabones en función del ángulo θ_8 de la manivela motor.
- Obtención del centro de masas de todos los eslabones y del conjunto en general.
- Determinación de la fase de doble apoyo del robot PASIBOT, mediante un criterio topológico.
- Estudio de la cinemática del PASIBOT en la fase de doble apoyo. Obtención de la cinemática relativa entre pies.
- Estudio de la transferencia de carga de un pie a otro en la fase de doble apoyo.
- Planteamiento y resolución de las ecuaciones de fuerzas para lograr los valores de la fuerza normal y fuerza de rozamiento.
- Planteamiento del método de resolución para determinar la dinámica del bípedo PASIBOT en la fase de doble apoyo.

Las conclusiones obtenidas al realizar los objetivos marcados son:

- El PASIBOT se encuentra en equilibrio en todo momento a la hora de realizar el paso completo y no hay peligro de vuelco hacia delante o hacia atrás. Al finalizar la primera etapa del paso se produce un pequeño vuelco hacia delante, pero durante un tiempo despreciable, antes de que el pie entrante tome contacto con el suelo.
- En la fase del doble apoyo existe una transferencia de carga desde el pie saliente hasta el pie entrante.



- Esta transferencia de masas en la etapa de doble apoyo, empieza de manera brusca al adelantarse el centro de masas y acaba antes de descargarse por completo al elevarse el pie saliente y pasar el centro de masas a estar soportado enteramente por el pie entrante.
- En el análisis de la fuerza de rozamiento, comprobamos que ésta puede tener valores muy diferentes entre sí, dependiendo del coeficiente de rozamiento utilizado según la combinación de materiales usados al recubrir el pie del PASIBOT y sobre el tipo de suelo que pisa este.
- En la etapa del doble apoyo existe un desplazamiento relativo entre los pies, al separarse en un principio, para luego volver a juntarse. Esta cinemática supone deslizamiento del pie entrante, del saliente o de ambos a la vez.
- Se ha planteado el método de resolución dinámica de la fase de doble apoyo, que contempla los tres casos posibles de deslizamiento y los correspondientes criterios de selección.



9. TRABAJOS FUTUROS

El método planteado para la resolución de las hipótesis de doble apoyo se va a implementar en el código de MATLAB existente [15]. Una vez realizado esta implementación, se podrá continuar con el estudio cinemático del PASIBOT realizando una serie de trabajos futuros:

- Estudio del deslizamiento en fase de apoyo simple.
- Estudio del deslizamiento en fase de doble apoyo.
- Estudio dinámico del vuelco.
- Comparación de los resultados con simulaciones del bípedo en fase de apoyo doble.



BIBLIOGRAFIA

- [1] Fundamentos de Robótica. Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñin, Carlos Balaguer y Rafael Aracil. (Edición de 1997)
- [2] Autómatas en la historia:
http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/automatas_en_la_historia.htm
(Última consulta noviembre 2009)
- [3] Clasificación de los robots:
<http://usuarios.lycos.es/sparta/experiences12.html> (Última consulta noviembre 2009)
- [4] MQ-1 Predator:
http://es.wikipedia.org/wiki/MQ-1_Predator (Última consulta diciembre 2009)
- [5] Nuevas aplicaciones de la robótica. Robots de servicio:
http://www.disa.bi.ehu.es/spanish/asignaturas/17219/Robots_Servicios-Barrientos.pdf (Última consulta diciembre 2009)
- [6] Mecanismo de Hoekens:
http://en.wikipedia.org/wiki/Hoekens_linkage (Última consulta octubre 2009)
- [7] Mecanismos de Línea Recta:
http://www.emc.uji.es/d/IngMecDoc/Mecanismos/Barras/MLR_pagina.html
(Última consulta octubre 2009)
- [8] Pafnuti Chebyshev:
http://es.wikipedia.org/wiki/Pafnuti_Chebyshev (Última consulta octubre 2009)
- [9] Pantógrafo:
<http://es.wikipedia.org/wiki/Pant%C3%B3grafo> (Última consulta octubre 2009)
- [10] Tercera Ley de Newton:
<http://www.monografias.com/trabajos7/lene/lene.shtml> (Última consulta diciembre 2009)
- [11] Fricción:
[http://es.wikipedia.org/wiki/Arranque_\(erosi%C3%B3n_glaciar\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Arranque_(erosi%C3%B3n_glaciar)) (Última consulta diciembre 2009)



- [12] Apuntes de Teoría de Mecanismos (Apuntes del curso 2007-2008)
- [13] Física para ciencias e ingeniería. Raymond A. Serway y John W. Jewett Jr.
(Edición de 2005)
- [14] Estática. J.L. Meriam (Edición de 2004)
- [15] Proyecto de Fin de Carrera de Eduardo Corral Abad (2008)